الإحصاء للتجاريين



تأليف

الأستاذ الدكتور/ شوقى سيف النصر سيد

كلية التجارة ـــ جامعة القاهرة

الإحصـــــاء للتجاريين

تأليف

الأستاذ الدكتور

شوقى سيف النصر سيد

كلية التجارة – جامعة القاهرة

٢٠١٦

تقــديم

علم الإحصاء هو علم تجميع وتنظيم البيانات والمعلومات وتلخيصها فى مقاييس ومؤشرات لإظهار معالمها وخصائصها وتحديد العلاقات بين الظواهر المختلفة ، وتفسير الحقائق والأمور غير الظاهرة ، والتنبؤ بالمستقبل ، لذلك يعتبر علم الإحصاء أداة هامة من أدوات البحث العلمى وضرورى لكافة العلوم الإنسانية والطبيعية ، والاهتمام بتطور وتقدم علم الإحصاء واستخدامه فى التخطيط والمتابعة أساس هام لتطور ونجاح المنظمات والمشروعات المختلفة.

ويحتوى هذا المرجع على دراسة متكاملة لمراحل البحث الإحصائى من خلال دراسة أساسيات علمى الإحصاء الوصفى والإحصاء التحليلى ، وتمت هذه الدراسة فى ثمانية أبواب مختلفة ، يختص الباب الأول منها بدراسة جمع وتصنيف وتبويب وعرض البيانات ، ويختص الباب الثانى بدراسة المتوسطات أو مقاييس النزعة المركزية ، ويختص الباب الثالث بدراسة مقاييس التشتت ، ويختص الباب الرابع بدراسة الارتباط والانحدار ، ويختص الباب الخامس بدراسة السلاسل الزمنية ، ويختص الباب السادس بدراسة الأرقام القياسية ، وهذه الأبواب الستة هى عصب علم الإحصاء الوصفى ، كما يختص الباب السابع بدراسة التوزيعات الاحتمالية وأخيراً يختص الباب الثامن بدراسة نظرية العينات والتقدير واختبارات الفروض الإحصائية ، ويعتبر البابان السابع والثامن هما عصب علم الإحصاء التحليلى.

ونأمل بهذا المرجع أن يكون فيه إضافة لمكتبة الإحصاء الغنية بالكثير من المراجع العلمية الهامة ، وأن يكون فى هذا المرجع دعم وإضافة للباحثين فى مختلف مجالات البحث العلمى

والله ولى التوفيق ،،،

المؤلف

مقدمة:

علم الإحصاء:

هو علم تجميع وتنظيم البيانات والمعلومات (الإحصاءات) عن طريق تبويبها وعرضها ثم تلخيصها فى مقاييس ومؤشرات لإبراز معالمها وخصائصها وتحديد العلاقات بينها واستكشاف وتفسير الحقائق غير الظاهرة والتنبؤ بالمستقبل بطرق علمية تحليلية منظمة.

تطور علم الإحصاء:

بدأ علم الإحصاء منذ العصور القديمة عن طريق حصر وعد السكان وحصر موارد الدولة ونفقاتها ، ثم تطور هذا العلم إبتداءاً من العصور الوسطى حيث ظهرت الحاجة الماسة لهذا العلم فى الحروب والغزوات لحصر الأفراد والمعدات والتنبؤ بإمكانيات وموارد الأعداء المادية والبشرية ومساعدة الدول على تحديد الضرائب وجبايتها وتسجيل الإحصاءات الحيوية عن المواليد والوفيات ، واعتباراً من بداية القرن الثانى عشر أدى التطور فى علوم الرياضيات وخاصة فى نظرية الاحتمالات إلى استخدامها بتوسع فى علم الإحصاء وخدمة نظرياته وبدأ التطور فى علم الإحصاء بعد أن كان قاصراً على الحصر والتجميع والتسجيل إلى القياس والتحليل ثم بدأ استخدام علم الإحصاء بتوسع فى الصناعة وذلك بعد الثورة الصناعية التى ظهرت فى بريطانيا ووسط أوروبا ، وتطور علم الإحصاء ليخدم الباحثين فى مجالات العلوم الإنسانية والعلوم الطبيعية وذلك بفضل كثير من العلماء أمثال برنوللى وجاوس وكارل بيرسون وسبيرمان وفيشر وغيرهم من أصحاب

النظريات التى أثرت فى أساليب التحليل والقياس ، ولا ننسى التطور الكبير المذهل فى الحاسبات الآلية وقدرتها الهائلة ودقتها المتناهية وسرعتها الفائقة فى استخدام البرامج الإحصائية بكثافة عالية جداً لخدمة التنمية على كل المستويات ومساعدة العلماء والباحثين فى البحوث والدراسات لحل مشاكل البيئة والمجتمع ، ولا ننسى دور شبكة الانترنت فى سرعة نقل وتمرير المعلومات والحصول على البيانات المطلوبة للدراسات والأبحاث.

مراحل البحث الإحصائى:

١- مرحلة جمع البيانات من السجلات والدفاتر والقوائم والمراجع المختلفة أو من الميدان عن طريق قائمة استقصاء.

٢- مرحلة تصنيف وتبويب البيانات فى جداول إحصائية.

٣- مرحلة عرض البيانات فى أشكال ورسوم بيانية لتفسير الظواهر والتعبير عنها.

٤- مرحلة القياس لتلخيص البيانات وتفسيرها وتحديد العلاقات بينها باستخدام النظريات والمقاييس والأدوات الإحصائية المختلفة.

٥- مرحلة التحليل والإستنباط واستقراء النتائج والتنبؤ بالظواهر مستقبلاً.

ولدراسة المراحل السابقة تم تقسيم علم الإحصاء إلى قسمين منفصلين هما:

١- الإحصاء الوصفى: Descriptive Statistic

وهو علم التعامل مع البيانات الأولية (الخام) بهدف إظهار سماتها وخصائصها من خلال مراحل البحث الإحصائى الأربعة الأولى السابقة وهى جمع وتبويب وعرض وقياس البيانات

٢- الإحصاء التحليلى: Analytical Statistic or Inductive Statistic

وهو علم الإستنباط عن طريق التخطيط والتقدير والتنبؤ بالمستقبل بهدف اتخاذ القرارات الإدارية المختلفة ، ويتضح ذلك من خلال المرحلة الخامسة من مراحل البحث الإحصائى السابقة.

وتعتبر نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية المختلفة ونظرية العينات والتقدير واختبارات الفروض الإحصائية هى الإطار الأساسى لهذا الفرع من فروع الإحصاء.



الباب الأول
جمع وتصنيف وتبويب وعرض البيانات

الفصل الأول: جمع البيانات

الفصل الثاني: تصنيف وتبويب البيانات

الفصل الثالث: العرض البيانى

الفصل الأول
جمع البيانات

<u>مصادر جمع البيانات:</u>

تتلخص مصادر الحصول على البيانات فيما يلى:

<u>أولاً: المصادر التاريخية:(مصادر مباشرة)</u>

وهذه المصادر تعتمد على التوثيق والرصد والتسجيل للحقائق والمعلومات التاريخية والمتوفرة عن الظاهرة محل البحث أو الدراسة ، وتتمثل فى الكتب والتقارير والإحصاءات المنشورة والوثائق والمستندات والأبحاث السابقة. وتنقسم المصادر التاريخية إلى:

١- <u>مصادر داخلية:</u>

وبمقتضاها يتم الحصول على البيانات من داخل الوحدة أو المشروع أو الجهاز من واقع الدفاتر والسجلات والقوائم المالية.

٢- <u>مصادر خارجية:</u>

وبمقتضاها يتم الحصول على البيانات من خارج الوحدة أو المشروع أو الجهاز من خلال ما تنشره الوحدات الأخرى.

وتنقسم المصادر الخارجية إلى:

(أ) مصادر أولية (أصلية):

يقوم بإعدادها ونشرها الجهة التى قامت بإعداد وجمع البيانات وتبويبها لأول مرة مثل بيانات التعدادات السكنية وبيانات عن ميزانية

الدولة وتعتبر المصادر الأولية أو الأصلية أكثر دقة وصدق عن غيرها من المصادر الأخرى.

(ب) مصادر ثانوية:

تشمل جميع البيانات والمعلومات المسجلة والتى سبق إعدادها فى مصدر أصلى أو أولى ثم يحصل منها الدارس أو الباحث على ما يحتاجه من معلومات مثل المعلومات والبيانات الموجودة فى المؤلفات والبحوث. وهذه المصادر أقل مصداقية من المصادر الأصلية لما يتعرض له الدارس من أخطاء بسبب النقل والتصرف من المصدر الأصلى ، ومنها أخطاء غير مقصودة مثل أخطاء الطبع والترجمة وعدم فهم المصدر الأصلى ، ومنها ما هو مقصود ويترتب عليه خطأ تحيز مثل إغفال جزء مهم من البيانات.

ثانياً: المصادر الميدانية:(مصادر غير مباشرة)

وتعنى أن يقوم الدارس بالحصول على المعلومات من الميدان عن طريق تصميم وإعداد قائمة استقصاء ، وتتميز المصادر الميدانية بأن الدارس عن طريق الإعداد والتخطيط الجيد يمكنه الحصول على المعلومات المطلوبة بدقة كما يدرك أى قصور أو أخطاء فى هذه البيانات بحيث يمكنه تجنبها أو تلافيها وذلك بعكس الحصول على بيانات ومعلومات جاهزة سبق أن أعدها غيره.

تصميم استمارة الاستقصاء: Questionaire

تعتبر استمارة الاستقصاء أو صحيفة الاستبيان هى الوسيلة المناسبة للحصول على المعلومات ، ويجب أن يقوم الباحث أو الدارس بإعداد

تصور لميزانية البحث قبل تصميم الاستمارة. ويراعى أن تشمل الاستمارة مجموعة من الأسئلة مبوبة ومقسمة فى مجموعات متجانسة كل مجموعة تختص بنوع واحد من الأسئلة ، ويراعى تسلسل الأسئلة تسلسلاً منطقياً يتلاءم مع تجانس البيانات ويسهل الحوار الذى يدور بين جامع البيانات والمبحوث ، وأن تكون الأسئلة محدودة بقدر الإمكان حتى لا تستغرق وقتاً طويلاً لاستيفائها، وتأخذ الأسئلة أحد الأشكال التالية:

(أ) الأسئلة ذات الاجابات الثنائية:

عادة ما يتم الإجابة على هذه الأسئلة بنعم أو لا ، وهى أسهل أنواع الأسئلة بالنسبة للمبحوث.

(ب) الأسئلة ذات الاجابات المتعددة:

وغالباً ما يزيد فيها عدد الإجابات عن أثنين وعادة ما يضع المبحوث علامة (√) أمام الإجابة المناسبة وهى أيضاً سهلة بالنسبة للمبحوث.

والنوعان السابقان من الأسئلة يحدان من قدرة المبحوث على الاستفاضة فى الإجابة وتدوين الرأى بصراحة.

(جـ) الأسئلة المفتوحة (الوصفية):

وهى أصعب أنواع الأسئلة عند استيفائها من المبحوث وعند تفريغها وتحليلها من جانب الدارس ، ويجب الإقلال من هذا النوع من الأسئلة فى قوائم الاستقصاء بقدر الإمكان.

(د) الأسئلة محددة المعلومات:

مثل كم عمرك – كم وزنك – عدد الأولاد – عدد غرف المنزل – الحالة الاجتماعية ، ويفضل قبل تصميم الاستمارة أن يكون أمام

الدارس شكلاً للجداول الهيكلية أو الصماء بدون معلومات والتى سيعد على أساسها الأسئلة والجداول النهائية بعد استيفاء إجابات صحيفة الاستبيان ،

قواعد تصميم استمارة الاستقصاء (صحيفة الاستبيان):

١. يجب اختيار أبسط الألفاظ الممكنة عند صياغة الأسئلة والتى تعبر عن معنى واضح ومفهوم ويجب تحاشى الأسئلة التى يكتنفها الغموض والصعوبة.
٢. تحاشى الأسئلة الشخصية المحرجة التى تؤدى إلى امتناع المبحوث عن الإجابة أو إلى إعطائه إجابات خاطئة أو مضللة أو الأسئلة الحساسة التى تتنافى مع قيم وعادات وتقاليد المجتمع.
٣. تحاشى الأسئلة الإيحائية التى توحى للمبحوث بإجابة معينة أو توحى إليه بالإدعاء والتفاخر والكذب والتضليل.
٤. تحاشى الأسئلة التى تحتاج لتركيز أو تعتمد على الذاكرة البعيدة.
٥. تحاشى الأسئلة التى تتطلب إجراء عمليات حسابية معقدة.
٦. يفضل أن تكون الأجوبة المتوقعة للأسئلة قصيرة ومختصرة.
٧. يجب تحاشى الأسئلة التى تؤدى إلى إجابات كيفية أو وصفية كلما أمكن ووضع أسئلة ذات إجابات كمية محددة وتحقق نفس الغرض من السؤال.
٨. شرح أو تفسير لبعض المصطلحات أو وحدات القياس المستخدمة بجوار اللفظ أو على هيئة ملحوظة أو فى التعليمات لضمان إجابات موحدة و متجانسة.

٩. مراعاة وضع أسئلة إضافية للمراجعة وكشف أخطاء بعض الإجابات من خلال تكرار بعض الأسئلة بصيغ مختلفة.

١٠. يراعى ترك فراغاً فى الاستمارة للمبحوث لإبداء أى آراء وترك فراغاً آخر لتدوين ملاحظات جامع البيانات.

١١. أن يؤخذ فى الاعتبار المستوى التعليمى والثقافى للمبحوثين عند صياغة الأسئلة.

١٢. عدم وضع أسئلة تكون إجاباتها الكمية أو الوصفية مدونة فى سجلات أو تقارير أو قوائم حيث يتم الحصول على هذه المعلومات مباشرة من مصادرها التاريخية (الأولية أو الثانوية).

وقد يقوم الدارس بإعداد قائمة استطلاعية أو استكشافية توزع على عينة محدودة من مجتمع الدراسة أو من داخل العينة المختارة لتطوير استمارة الاستقصاء وإعادة صياغتها من جديد بما يخدم الدراسة.

طرق جمع البيانات الميدانية:

تتلخص طرق استيفاء قوائم الاستقصاء فيما يلى:

١- المقابلة الشخصية (الاتصال المباشر):

يتم مقابلة الشخص موضوع الدراسة (المبحوث) لاستيفاء المعلومات منه وتدوينها مباشرة فى قائمة الاستقصاء وتمتاز هذه الطريقة بالاتصال المباشر بالمبحوث وتوجيه الأسئلة له مباشرة ومن ثم تفسير مصطلحاتها أو المقصود منها وتدوين الأجوبة وتسجيل أية ملاحظات عن ردود الأفعال ، بالإضافة إلى استيفاء قوائم الاستقصاء

بالكامل ، كما تناسب هذه الوسيلة استيفاء بيانات من الأشخاص الأميين.

٢- <u>المراسلة (البريد):</u>

وبمقتضاها يتم إرسال قوائم الاستقصاء للمبحوثين عن طريق البريد ، وتتميز هذه الطريقة بالسرعة فى تغطية مساحات جغرافية واسعة وعدم الحرج فى كتابة بعض الإجابات عند مقابلة المبحوثين وجهاً لوجه. كما تعطى المبحوثين الوقت الكافى لفهم الأسئلة واستيعابها والإجابة عليها ، ولا يتعرض الأفراد المبحوثين لتحيز الباحث ويفضل إضافة ظرف وطابع البريد لتسهيل مهمة المبحوث فى الرد السريع وعدم تحمله بأية نفقات.

ويمكن أن ترفق قائمة الاستقصاء بسلعة معينة أو تنشر فى مجلة أو جريدة ويرسل المبحوثين إجاباتهم بالبريد ، وتتميز هذه الوسيلة بضعف تكلفتها بالمقارنة بطريقة المقابلة الشخصية ، ولكن يعيبها الضعف الشديد لنسب استجابة المبحوثين بالمقارنة بطريقة المقابلة الشخصية واحتمال ضياع أو تأخير الاستمارات فى البريد بالإضافة إلى صعوبة الرد على بعض الأسئلة الغامضة التى تحتاج إلى تفسير أو توضيح. كما تشترط هذه الوسيلة إجادة المبحوثين القراءة والكتابة وقد يقوم شخص آخر بإستيفاء الاستمارة والرد عليها غير الشخص المطلوب. ولمعالجة بعض هذه العيوب تحتاج هذه الوسيلة إلى الاهتمام الشديد بسهولة الصياغة ومتابعة المراسلة مرة أخرى فى حالة عدم رد المبحوث.

٣- التليفون والأنترنت:

تتميز هذه الطريقة بالسرعة وتغطية مساحات جغرافية واسعة وانخفاض التكلفة بالمقارنة بطريقة المقابلة الشخصية كما تمتاز عن طريقة المراسلة بإمكانية توضيح أى غموض فى الأسئلة ولكنها تخلو من مزايا المواجهة والاتصال المباشر ، كما أنها تقتصر على فئة خاصة من المجتمع وهم أصحاب التليفونات فقط (خطأ تحيز) بالإضافة إلى قصور الأسئلة التفصيلية نظراً لضيق الوقت بالنسبة للمكالمات التليفونية مما يتعذر معه الحصول على بعض البيانات كما أن عامل سرية المعلومات يكون محدوداً بالمقارنة بالطرق الأخرى ، وقد تكون مكلفة لبعض المسافات.

كما يعتبر الانترنت أحدث وسيلة للحصول على البيانات والمعلومات عن موضوع الدراسة بسرعة فائقة وبتكلفة زهيدة ولكن مصداقية هذا المصدر تقل وتتضاءل كثيراً عن المصادر الأخرى ولذلك يمكن اعتبارها وسيلة مساعدة بجانب الوسائل الأخرى لاستكمال وإضافة بعض البيانات والمعلومات اللازمة للدراسة.

٤- المشاهدة والملاحظة والتجربة:

كثير من الدراسات تختص بظواهر يمكن ملاحظتها ومشاهدتها وتسجيل النتائج عنها مثل تسجيل حركة المرور بشارع معين أو على كوبرى ، أو تسجيل ملاحظات عن التهوية أو الإضاءة أو النظافة بموقع معين ، وهناك البحوث والدراسات المعملية والتى تعتمد على التجربة والملاحظة وتسجيل النتائج ، كما إن إلزام الأفراد بتسجيل

ظواهر معينة فى سجلات مثل المواليد والوفيات واستخراج تراخيص مرور السيارات مصدر آخر للتسجيل والحصول على المعلومات.

الخلاصة:

يمكن للدارس الحصول على المعلومات والبيانات باستخدام طريقة واحدة أو أكثر فى بحث واحد لاستكمال بياناته أو للمراجعة عليها.

أساليب جمع البيانات:

هناك أسلوبان لجمع البيانات فى الدراسات والبحوث المختلفة وهما أسلوب الحصر الشامل وأسلوب العينات ولكل أسلوب مزاياه وعيوبه ويستخدم الباحثون أسلوب دون الآخر كما يمكن الجمع بين الأسلوبين فى دراسة واحدة.

(١) الحصر الشامل (المجتمع): Complete Census

يعنى أسلوب الحصر الشامل أن الدراسة تشمل كل مفردات المجتمع الإحصائى وعلى الباحث أن يحدد بدقة تعريف المجتمع الإحصائى محل الدراسة ، ويقصد بالمجتمع الإحصائى جميع المفردات التى يجمعها إطار عام واحد أو تتفق فى مجموعة خصائص عامة واحدة.

الإطار: Frame

هو القائمة التى تحتوى على جميع المفردات الموجودة داخل المجتمع والمتفقة فى نفس الخصائص ، ويتم ترتيب أو ترقيم مفردات المجتمع داخل القائمة أو الإطار ، والإطار السليم هو الذى يشمل جميع مفردات

المجتمع ويمنع التكرار ويمنع الاستبعاد وبالتالى يعتمد على تعريف دقيق لمفردات المجتمع وخصائصه.

وينقسم المجتمع إلى نوعين:

١. المجتمع المحدود:

وهذا المجتمع يمكن حصره أو عده ويتم تحديده بوضع تعريف دقيق لإطار المجتمع ومن ثم تحديدجميع المفردات الواقعة داخل هذا الإطار والتى لها نفس خصائص المجتمع مثل: مجتمع طلبة كلية التجارة جميع السنوات الدراسية بجامعة القاهرة خلال العام الجامعى ٢٠١٤/٢٠١٣ ومجتمع السيارات الملاكى المرخص لها فى محافظة القاهرة خلال شهر يناير ٢٠١٤

٢. المجتمع غير المحدود:

وهذه المجتمعات لا يمكن حصرها أو عدها ولكن يمكن وضع خصائص وصفات مميزة لها مثل مجتمع الأسماك فى بحيرة ناصر ، ولا يمكن إعداد قائمة مفردات المجتمع ، ودراسة المجتمعات غير المحدودة لا يمكن أن يتم إلا عن طريق دراسة عينة عشوائية من هذه المجتمعات.

مميزات أسلوب الحصر الشامل:

١. لا تحتاج لتعميم النتائج مثل دراسة العينات وبالتالى تتخلص النتائج من أخطاء الصدفة أو الأخطاء العشوائية والتى لا توجد إلا عند

دراسة العينات ، وهذا الأسلوب يحقق لنا الثقة الكاملة فى النتائج والفرصة لدراسة جميع مفردات المجتمع الإحصائى.

٢. يعتبر أسلوب الحصر الشامل هو الأسلوب الأكثر ملائمة فى بعض الدراسات مثل التعداد العام للسكان وتعداد المنشآت الصناعية والزراعية وغيرها وتعداد القوى العاملة.

٣. يعتبر أسلوب الحصر الشامل هو الأسلوب الأمثل لدراسة بعض الظواهر التى يترتب على إغفال دراسة بعضها أضرار كبيرة مثل التطعيم.

عيوب أسلوب الحصر الشامل:

كلما كان المجتمع الإحصائى كبير جداً كلما تطلب وقتاً طويلاً ومجهوداً كبيراً ونفقات باهظة لدراسة المجتمع كاملاً.

(٢) أسلوب العينات: Sample

العينة: عبارة عن جزء محدود من مفردات المجتمع الأصلى يتم اختياره بطريقة عشوائية.

الاختيار العشوائى: هو الاختيار الذى يحقق تكافؤ الفرص بين جميع مفردات المجتمع أى هو الاختيار الذى يتم بدون تمييز وبدون تحيز.

ويتحقق الاختيار العشوائى لمفردات المجتمع بأحد الوسائل التالية:

أ. طريقة البطاقات أو الكروت المرقمة أو الكور المتماثلة الشكل.

ب. استخدام الحاسبات الآلية فى استخراج العينة عشوائياً.

ج. جداول الأرقام العشوائية Table of Random Numbers:

وتعد هذه الجداول على أساس الاختيار العشوائى للأعداد الطبيعية الأساسية العشرة من صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ٩ وفقاً لترتيب الحصول عليها عشوائياً (سحب مع الإحلال) وتسجل النتائج فى صورة أعمدة وصفوف وتستخدم بعد تحديد حجم المجتمع فى اختيار العينة المطلوبة.

وعلى سبيل المثال : إذا كان حجم المجتمع ٨٠ مفردة مرقمة نجد أن هذا المجتمع يتكون من خانتين | ٠ | ٨ | خانة الآحاد وخانة العشرات وبالتالى يتم الاختيار العشوائى للعينة من عمودين متجاورين ، فإذا كان حجم العينة ٥ مفردات يتم اختيارها كما يلى:

نموذج لجداول الأرقام العشوائية

١	٠	٦	٣	√	٢	١	√
٢	٨	٩	٢	X	٣	٥	√
٧	١	١	٣	√	٩	٠	X
٨	٢	٣	٧		٠	٦	√
٠	٩	١	٥		٨	٧	X

نختار المفردة الأولى رقم |٢١| والثانية رقم |٣٥| وتترك الثالثة لأنها خارج إطار المجتمع ونختار المفردة الرابعة رقم |٦| وتترك الخامسة لأنها خارج إطار المجتمع ثم ننتقل لعمودين جديدين ونختار السادسة رقم |٦٣| وتترك السابعة لأنها خارج إطار المجتمع ثم نختار الثامنة رقم |١٣| ويمكن إذا كان حجم العينة كبير بعد الانتهاء من العمود الأول والثانى يتم الاختيار

من العمود الثانى والثالث وهكذا ، (يقوم الباحث باختيار طريقة واحدة ويسجلها ولا يتم تغييرها) وإذا كان حجم المجتمع ٥٠٠ مفردة يتم الاختيار من ٣ أعمدة متجاورة وهكذا.

أسباب دراسة العينات:

١. توفير الوقت والجهد والتكاليف خاصةً إذا كانت ميزانية البحث محدودة والمدة اللازمة لإنجازه محدودة ، أى أن الحجم المناسب للعينة تحدده ميزانية البحث والأفراد والوقت المناسب لإتمامه.
٢. إذا كانت مفردات المجتمع من النوع الذى يفنى أو يتلاشى بتجربته أو استعماله لذلك يضطر الباحث لدراسة عينة حتى لا يقضى على وحدات المجتمع كاملة ، مثل دراسة جودة انتاج أو المواصفات القياسية لسلعة استهلاكية معينة أو دراسة كفاءة بعض منتجات الأسلحة الحربية.
٣. إذا كان المجتمع غير محدود.
٤. التعمق فى الدراسة بدلاً من السطحية عند دراسة المجتمع.

عيوب دراسة العينات:

١. لا توفر للباحث بيانات كاملة عن كل مفردات المجتمع وبالتالى تكون نتائج العينة أقل دقة دائماً من نتائج المجتمع لما تحويه من أخطاء الصدفة أو الأخطاء العشوائية.
٢. تتوقف نتائج الدراسة إلى حد كبير على مدى تمثيل العينة للمجتمع ومدى عشوائيتها.

وبالرغم من العيوب السابقة فإن إسلوب العينات هو الأكثر شيوعاً واستخداماً خاصة بعد تقدم علم الإحصاء التحليلى.

أنواع العينات:

يمكن عرض أنواع العينات شائعة الاستخدام فيما يلى:

(١) العينة العشوائية البسيطة: Simple Random Sample

تصلح العينة العشوائية البسيطة إذا كان حجم المجتمع محدود (صغير) ومتجانس بمعنى أن تكون وحدات المجتمع متشابهة فى الخصائص ونسب تمثيلها فى المجتمع الأصلى تكاد تكون متعادلة تقريباً ، ويتم عادة ترتيب مفردات المجتمع وترقيمها داخل إطار معين ثم تسحب العينة عشوائياً بعد تحديد حجمها بطريقة من الطرق السابقة والتى تحقق تكافؤ الفرص لجميع مفردات المجتمع عند الاختيار.

ويمتاز هذا النوع من العينات بالبساطة وسهولة الاختيار وقلة التكاليف ، ومن عيوب العينة العشوائية البسيطة أنها لا تصلح للمجتمعات الكبيرة حيث تحتاج لوقت ومجهود وتكلفة ، كما أنها لا تعبر عن الطبقات المختلفة أو الخصائص المختلفة لمفردات المجتمع إن وجدت وبالتالى لا تسمح بالتحليل الدقيق وتعطى عادةً نتائج عامة.

(٢) العينة العشوائية المنتظمة: Systematic Random Sample

تصلح العينة العشوائية المنتظمة للمجتمعات كبيرة الحجم ولكن بشرط أن تكون متجانسة أى متشابهة فى الخصائص وبمقتضاها يتم ترقيم ثم ترتيب المجتمع ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ثم يقسم المجتمع إلى مجموعات متتالية أو متتابعة بحيث يكون عدد المجموعات هو نفس حجم العينة ويتم اختيار

مفردة العينة الأولى من المجموعة الأولى بطريقة العينة العشوائية البسيطة ، ثم يتم تكرار اختيار نفس ترتيب المفردة الأولى فى باقى المجموعات التالية بانتظام.

ويمتاز هذا النوع من العينات بأنه يضمن انتشار أو توزيع العينة على المدى الكبير للمجتمع وعدم تركزها فى فئات معينة ، كما يمتاز هذا النوع من العينات بالسهولة فى الاختيار وقلة الجهد والتكاليف حيث أن عنصر العشوائية يقتصر على مفردة المجموعة الأولى فقط وباقى الاختيار يتم بانتظام فى باقى المجموعات ، ولا يعتبر هذا النوع مناسباً إذا كانت المجموعات غير متجانسة وغير متفقة فى الخصائص أو الحجم.

وعلى سبيل المثال: إذا كان لدينا مجتمع حجمه ٥٠ مفردة متجانسة والمطلوب اختيار عينة عشوائية حجمها ٢٠٪ من هذا المجتمع

∴ حجم العينة = ٥٠ × $\frac{٢٠}{١٠٠}$ = ١٠ مفردات وبالتالى يتم تقسيم المجتمع بعد ترقيمه وترتيبه إلى ١٠ مجموعات (نفس حجم العينة) كما يلى:

المجموعة الأولى : ١ ، **(٢)** ، ٣ ، ٤ ، ٥

المجموعة الثانية : ٦ ، **(٧)** ، ٨ ، ٩ ، ١٠

المجموعة الثالثة : ١١ ، **(١٢)** ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥

المجموعة الرابعة : ١٦ ، **(١٧)** ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ وهكذا إلى

" – – – – –

" – – – – –

المجموعة التاسعة : ٤١ ، **(٤٦)** ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥

المجموعة العاشرة : ٤٦ ، **(٤٧)** ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠

ويتم توزيع مفردات العينة العشرة على المجموعات العشرة بحيث يختار من كل مجموعة مفردة واحدة فقط ، ويتم اختيار مفردة المجموعة الأولى عشوائياً بطريقة العينة العشوائية البسيطة ولتكن المفردة المختارة عشوائياً من المجموعة الأولى هى المفردة رقم (٢) ، بعد ذلك يتم تكرار هذا الاختيار وبنفس ترتيب المفردة الأولى فى باقى المجموعات أى نضيف دائماً حجم كل مجموعة (٥ مفردات فى هذا المثال) على رقم المفردة المختارة عشوائياً لنصل لباقى مفردات العينة فى المجموعات التالية بانتظام وبالتالى يتم اختيار المفردات أرقام (٧) ، (١٢) ، (١٧) ، (٢٢) ، (٢٧) ، (٣٢) ، (٣٧) ، (٤٢) ، (٤٧) وإذا كان حجم العينة ١٠٪ أى

$$= ٥٠ \times \frac{١٠}{١٠٠} = ٥$$ مفردات.

يتم تقسيم المجتمع إلى ٥ مجموعات متتالية المجموعة الأولى من (١–١٠) والمجموعة الثانية من (١١–٢٠) والمجموعة الثالثة من (٢١–٣٠) والمجموعة الرابعة من (٣١–٤٠) والمجموعة الخامسة من (٤١–٥٠) ثم نختار مفردة المجموعة الأولى عشوائياً فإذا كانت فرضاً هى المفردة رقم (٤) نضيف على هذا الرقم طول المجموعة وهو رقم ١٠ لتكون المفردات التالية المختارة بانتظام هى المفردات أرقام (١٤) ، (٢٤) ، (٣٤) ، (٤٤).

(٣) العينة العشوائية الطبقية: Stratified Random Sample

تصلح للمجتمعات الكبيرة غير المتجانسة أو التى تتنوع الخصائص المميزة لمفرداتها ، حيث يتم تقسيم المجتمع إلى مجموعات أو طبقات متجانسة ومتحدة الخصائص أى أن المفردات داخل كل مجموعة تكون متجانسة.

وبين المجموعات وبعضها البعض تكون متباينة وعادةً ما تكون المجموعات مختلفة الحجم ويتم توزيع العينة على الطبقات المختلفة بأحد الأساليب التالية:

أ – التوزيع المتساوى:

وفيها يتم توزيع العينة على الطبقات المختلفة بالتساوى وهذه الطريقة وإن كانت تضمن تمثيل كل الطبقات فى العينة المختارة ولكنها تغفل الأهمية النسبية لكل طبقة ، وتعتبر هذه الطريقة أسهل طرق الاختيار وأقلها تكلفة.

ب– التوزيع النسبى:

وفيها يتم توزيع العينة على الطبقات المختلفة بنسبة تمثيل كل طبقة فى المجتمع الأصلى حتى نضمن تمثيل جميع طبقات المجتمع وبنفس الحجم النسبى لكل طبقة داخل العينة.

وعلى سبيل المثال: إذا كان لدينا مجتمع حجمه ١٠٠٠ فرد من بينهم ٦٠٠ ذكور ، ٤٠٠ إناث والمطلوب اختيار عينة عشوائية طبقية حجمها

٢٠٪ من مفردات المجتمع أى تعادل = $١٠٠٠ \times \frac{٢٠}{١٠٠}$ = ٢٠٠ فرد

ثم يتم توزيع العينة على فئات الذكور والإناث بنسبة تمثيل كل فئة فى المجتمع الأصلى كما يلى:

عينة الذكور = $٢٠٠ \times \frac{٦٠٠}{١٠٠٠}$ = ١٢٠ فرداً

عينة الأناث = $٢٠٠ \times \frac{٤٠٠}{١٠٠٠}$ = ٨٠ فرداً

جـ- التوزيع الأمثل:

قد يكون هناك تباين نسبى داخل إحدى الطبقات وهنا يفضل زيادة نصيب أو نسبة تمثيل هذه الطبقة فى العينة حتى نضمن تمثيل التباين النسبى داخل الطبقة فى العينة المختارة وذلك بالمقارنة بالطبقات ذات التجانس الكامل بين مفرداتها أى أنه عند تحديد حجم عينة كل طبقة يؤخذ فى الاعتبار عنصرين هما: الأول نسبة تمثيل حجم الطبقة فى المجتمع الأصلى والثانى هو تباين أو تشتت المفردات داخل كل طبقة ، ويفيد قياس التشتت داخل كل طبقة بين مفرداتها فى تحديد مدى التجانس أو التباين بين مفردات الطبقة الواحدة وتعتبر هذه الطريقة هى أفضل طرق الاختيار ولكنها أكثرهم تعقيداً وتكلفة.

وبعد تحديد حجم عينة كل طبقة يتم اختيار العينة من داخل الطبقة إما بطريقة العينة العشوائية البسيطة إذا كان حجم الطبقة محدوداً وبالتالى يكون حجم العينة محدوداً أو بطريقة العينة العشوائية المنتظمة إذا كان حجم الطبقة كبيراً ، أى أنه يمكننا الجمع بين ثلاث أنواع من العينات فى اختيار واحد ، العينة الطبقية ثم العينة البسيطة والعينة المنتظمة ، وتعتبر العينة العشوائية الطبقية من أفضل أنواع العينات الممثلة للمجتمع تمثيلاً حقيقياً ودقيقاً وبذلك تساعد على التحليل العميق والوصول لنتائج جيدة.

<u>(٤) العينة العشوائية متعددة المراحل:</u> Malti-Stage Random Sample

ويطلق عليها أحياناً العينة العنقودية Cluster Sample وفيها يتم اختيار العينة على عدة خطوات أو مراحل متتابعة أو متتالية وفى كل مرحلة

نختار العينة إما بطريقة العينة العشوائية البسيطة أو بطريقة العينة العشوائية المنتظمة أو بطريقة العينة العشوائية الطبقية.

وعلى سبيل المثال فى بحث عن مستوى الأسرة فى الريف المصرى يكون من الأفضل الوصول لعينة الأسر على عدة مراحل كما يلى:

المرحلة الأولى:

نختار عينة محافظات من محافظات الوجه البحرى ومحافظات الوجه القبلى ومن الأنسب أن تكون عينة عشوائية طبقية.

المرحلة الثانية:

نختار عينة مدن من داخل عينة المحافظات المختارة إما بطريقة العينة العشوائية البسيطة أو المنتظمة أو الطبقية.

المرحلة الثالثة:

نختار عينة قرى من داخل عينة المدن المختارة إما بطريقة العينة العشوائية البسيطة أو المنتظمة أو الطبقية.

المرحلة الرابعة:

نختار عينة أسر من داخل عينة القرى المختارة إما بطريقة العينة العشوائية البسيطة أو المنتظمة أو الطبقية.

وتتوقف نوع العينة فى كل مرحلة حسب حجم المجتمع ومدى تجانس مفرداته فى كل مرحلة على حدة.

أنواع الأخطاء فى البيانات:

(١) خطأ التحيز: Biased Error

ويطلق على أخطاء التحيز اصطلاح الأخطاء المنتظمة Systematic Error وهذه الأخطاء توجد عند دراسة العينات وعند دراسة المجتمع ولكنها توجد بصورة أكثر عند دراسة المجتمعات ، وعادة ما تكون هذه الأخطاء فى اتجاه واحد إما موجبة أو سالبة ، وهذه الأخطاء مقصودة وتنشأ من المصادر التالية:

أ – التقصير عند دراسة المجتمع (أسلوب الحصر الشامل) من جانب الباحث سواء كان تقصيراً فى الوقت أوالجهد أو النفقات ، وأى إهمال أو تقصير من الباحث فى مراحل وخطوات البحث المختلفة سواء عند دراسة المجتمع أو دراسة عينة أو عند استيفاء بيانات صحيفة الاستبيان أو نظراً لعدم كفاءة الباحثين أو جامعى البيانات.

ب– أى بيانات خاطئة من مصادرها التاريخية أو الميدانية.

جـ– الاختيار غير العشوائى لمفردات العينة بمعنى عدم إعطاء نفس الفرص المتكافئة لجميع مفردات المجتمع عند الاختيار أو عدم وجود إطار سليم للمجتمع من ناحية الشمولية أو التكرار ، أو صعوبة الحصول على بعض بيانات العينة.

د – استخدام أدوات ومقاييس إحصائية غير مناسبة لنوعية البيانات والدراسة.

وهذه الأخطاء المنتظمة (أخطاء التحيز) من الصعب على الباحثين تقييمها أو حسابها ودراستها ولابد من القضاء على أسباب وجودها وتخليص البيانات منها وإلا توصل الباحث لنتائج غير دقيقة ولا تتفق مع أهداف وفروض البحث.

<u>(٢) خطأ الصدفة (الخطأ العشوائى):</u> Random Error

ليس للباحثين أى دخل فى نشأة أو وجود أخطاء الصدفة وهذه الأخطاء موجودة عند دراسة العينات فقط ولا توجد عند دراسة المجتمع وتتمثل هذه الأخطاء فى الفروق أو الانحرافات بين نتائج استخدام بعض المقاييس والأدوات الإحصائية لظاهرة معينة فى العينة وبين نفس نتائج استخدام هذه المقاييس والأدوات الحقيقية فى المجتمع ، ويرجع سبب وجود هذه الأخطاء لصغر أو ضآلة حجم العينة عن حجم المجتمع ولاختيار بعض المفردات عشوائياً دون غيرها فى نطاق العينة ، وقد يكون الخطأ العشوائى موجباً أو سالباً ولكن تتعادل دائماً الأخطاء أو الانحرافات الموجبة مع الأخطاء السالبة لجميع العينات التى يمكن اختيارها أو سحبها من المجتمع وإذا فرضنا أن حجم المجتمع (ن) وحجم العينة (ر) فإن

عدد العينات التى يمكن سحبها أو اختيارها من المجتمع = ن ق ر

فإذا فرضنا أن المقياس الإحصائى المطلوب هو الوسط الحسابى يلاحظ ما يلى:

الوسط الحسابى للمجتمع (م) والأوساط الحسابية للعينات المسحوبة من المجتمع هى: $\bar{س}_{١}$ ، $\bar{س}_{٢}$ ، $\bar{س}_{٣}$ ، .... أوساط عددها ن ق ر

ويطلق على مجتمع الأوساط الحسابية للعينات توزيع المعاينة كما يطلق على أى انحراف أو فرق بين مركز المجتمع (م) والوسط الحسابى لأى عينة ($\overline{س}$) خطأ الصدفة أو الخطأ العشوائى ويلاحظ على أخطاء الصدفة (العشوائية) الخصائص التالية:

أ – لا توجد إلا فى نتائج دراسة العينات فقط.

ب– هذه الأخطاء موجبة أو سالبة ومجموع انحرافات هذه الأخطاء الموجبة والسالبة = صفر

جـ –الأخطاء أو الانحرافات الصغيرة هى الأكثر احتمالاً أو شيوعاً من الأخطاء الكبيرة ما لم يكن هناك قراءات أو قيم شاذة فى مفردات المجتمع بمعنى أنه كلما زاد التباين أو الانحراف المعيارى بين مفردات المجتمع كلما ارتفعت قيم هذه الأخطاء والعكس صحيح.

د – يتناسب الخطأ العشوائى أو خطأ الصدفة تناسب عكسى مع حجم العينة فكلما زاد حجم العينة كلما تضاءل حجم الخطأ العشوائى حتى يتلاشى تماماً عند دراسة المجتمع كاملاً والعكس صحيح.

<u>مثال:</u>

إذا كان لدينا مجتمع الأرقام ٤ ، ٧ ، ٩ ، ١٢ فإن الوسط الحسابى للمجتمع (م) = $\frac{٤+٧+٩+١٢}{٤}$ = ٨

وإذا فرضنا أننا أخذنا عينة عشوائية من رقمين فقط فيكون لدينا مجتمع العينات التالى:

(٤ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٤ ، ١٢) ، (٧ ، ٩) ، (٧ ، ١٢) ، (٩ ، ١٢)

عدد العينات السابقة التى تم سحبها أو اختيارها = ٤ق٢ = ٦ عينات

وتكون الأوساط الحسابية للعينات الست السابقة هى على الترتيب:

(٥,٥) ، (٦,٥) ، (٨) ، (٨) ، (٩,٥) ، (١٠,٥)

وتكون الفروق أو الانحرافات بين متوسط المجتمع والأوساط الحسابية للعينات السابقة (خطأ الصدفة) هى على الترتيب:

(–٢,٥) ، (–١,٥) ، (٠) ، (٠) ، (١,٥) ، (٢,٥)

وواضح أن مجموع الانحرافات أو الفروق السابقة = صفر

والوسط الحسابى لمتوسطات العينات السابقة = الوسط الحسابى للمجتمع = ٨

أسئلة على الفصل الأول

١. حدد مصادر الحصول على المعلومات والبيانات الإحصائية.
٢. تكلم عن قواعد تصميم صحيفة الاستبيان وأنواع الأسئلة التى تتضمنها.
٣. تكلم عن طرق جمع البيانات.
٤. حدد مع التقييم أساليب جمع البيانات.
٥. تكلم عن أسباب دراسة العينات.
٦. تكلم عن أنواع الأخطاء فى البيانات.
٧. تكلم عن أنواع العينات ومجالات استخدام كل نوع.

الفصل الثانى
تصنيف وتبويب البيانات
Classification and Tabulation

<u>مقدمة:</u>

بعد جمع البيانات من مصادرها المختلفة يتم مراجعتها مكتبياً لاستبعاد البيانات غير الصحيحة منها أو إعادة تصحيحها أو استكمالها من مراجعها الأصلية سواء كانت تاريخية أو ميدانية ، كما يجب مراجعة مدى تجانس البيانات من ناجية النوع والزمن ووحدات القياس .... إلخ.

ويطلق على البيانات الأولية المجمعة لأغراض البحث أو الدراسة بيانات خام أو بيانات غير مبوبة لذلك تبدأ المرحلة الأولى لتجهيز هذه البيانات عن طريق تصنيفها فى مجموعات متجانسة ثم ترتيب وعرض هذه البيانات فى جداول إحصائية لتسهيل عملية عرضها وتحليلها لاستنباط النتائج المرجوه منها والاستفادة الكاملة لتحقيق أغراض البحث أو الدراسة.

والجدول الإحصائى ليس له شكل عام موحد يتفق عليه جميع الإحصائيين ولكن له قواعد عامة وشروط يجب مراعاتها عند إعداد أى جدول أو تكوينه وهذه القواعد العامة لا تخرج عن تحديد عنوان للجدول واضح ومختصر ومعبر عن نوعية البيانات التى يشملها الجدول بالإضافة إلى كتابة عناوين لكل الخانات الأفقية والرأسية كل عنوان معبر عن نوعية البيانات داخل الخانة على أن يراعى ترتيب بيانات أى جدول ترتيب زمنى أو مكانى أو كمى أو نوعى وأن يوضح بجانب عنوان كل جدول

وحدات القياس المستخدمة داخل الجدول مع استيفاء مصدر كل جدول على حدة.

وإذا كنا بصدد عرض بيانات كمية داخل الجدول لابد من تقسيم هذه البيانات فى مجموعات متجانسة يطلق عليها اصطلاح الفئات وذلك فى الإطار التالى:

بند (١): الفئات:

يمكن تقسيم المتغيرات الكمية إلى النوعين التاليين:

١. المتغيرات المنفصلة Discrete Variables

يطلق عليها المتغيرات الوثابة أو المتقطعة وهذه المتغيرات لا تأخذ إلا قيماً معينة أو محددة فقط خلال مدى أو نطاق معين وعادة ما تختلف قيم عناصرها عن بعضها البعض بأعداد صحيحة موجبة ومن أمثلة المتغيرات المنفصلة أعداد الطلبة ، أعداد السيارات ، أعداد المقررات الدراسية.

٢. المتغيرات المتصلة Continuous Variables

وهى المتغيرات التى تأخذ جميع القيم الممكنة خلال فترة أو مدى معين بما فيها القيم الكسرية والقيم السالبة ومن أمثلة المتغيرات المتصلة درجات الحرارة ، حجم السائل ، الأطوال ، الأوزان.

ويقوم الباحث بتقسيم المسافة أو المدى بين أصغر قراءة وأكبر قراءة للمتغير سواء كان منفصل أو متصل إلى مجموعات أو فئات متساوية أو غير متساوية ويتوقف عدد هذه الفئات على حجم البيانات ومدى تركيزها

والهدف من البحث ، والفئات المتساوية هى التى تكون على أبعاد أو مسافات متساوية أما الفئات غير المتساوية هى التى تكون على مسافات غير متساوية ، ويكون لكل فئة حد أدنى وحد أعلى ويطلق على المسافة بينهما طول الفئة حيث:

طول الفئة = الحد الأعلى للفئة – الحد الأدنى للفئة

ويطلق عل منتصف المسافة بين الحد الأدنى والحد الأعلى مركز الفئة حيث:

مركز الفئة = $\frac{١}{٢}$ (الحد الأدنى للفئة + الحد الأعلى للفئة)

= الحد الأدنى للفئة + $\frac{١}{٢}$ طول الفئة

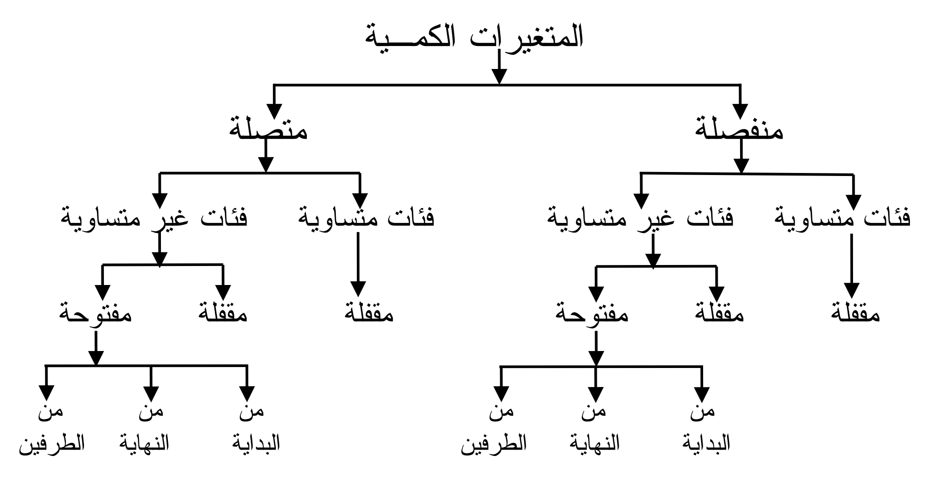
= الحد الأعلى للفئة − $\frac{١}{٢}$ طول الفئة

وفى الفئات المتساوية مراكزها تكون على أبعاد متساوية والبعد بين كل مركزين يساوى طول الفئة.

والفئات المتساوية يطلق على جداولها دائماً جداول مقفلة أى أن بداية الجدول ونهايته معلومان بمعنى أن الحد الأدنى للفئة الأولى و الحد الأعلى للفئة الأخيرة معلومان ، كما يتوقف تقسيم الفئات إلى متساوية أو غير متساوية على الهدف من الدراسة ونوعية البيانات ومدى تركيزها أو توزيعها خلال المدى بين أكبر قراءة وأصغر قراءة ، أما الفئات غير المتساوية فجداولها قد تكون مقفلة أو مفتوحة والفئات المفتوحة قد تكون مفتوحة من البداية أى أن بداية الجدول أو الحد الأدنى للفئة الأولى يكون غير معروف وقد تكون جداول مفتوحة من النهاية أى أن نهاية الجدول أو

الحد الأعلى للفئة الأخيرة يكون غير معروف وقد تكون الجداول مفتوحة من البداية والنهاية معاً وتكتب الفئات غير المتساويةللمتغيرات المتصلة إما بحدها الأدنى فقط أو بحدها الأعلى فقط.

ويمكن تلخيص أنواع الفئات السابقة فى الشكل التالى:



وفيما يلى أمثلة لأنواع الفئات السابقة:

(١) فئات متساوية لمتغير كمى منفصل (مقفلة):

٥ – ١٠

١١ – ١٦

١٧ – ٢٢

(٢) فئات غير متساوية مقفلة لمتغير كمى منفصل:

٥ – ١٠

١١ – ٢٠

٢١ – ٢٧

٢٨ – ٤٠

(٣) فئات غير متساوية مفتوحة من البداية لمتغير كمى منفصل:

– ١٠
١١ – ١٥
١٦ – ٢٥

(٤) فئات غير متساوية مفتوحة من النهاية لمتغير كمى منفصل:

٥ – ١٠
١١ – ٢٠
٢١ –

(٥) فئات غير متساوية مفتوحة من الطرفين لمتغير كمى منفصل:

– ٢٥
٢٦ – ٣٠
٣١ –

(٦) فئات متساوية مقفلة لمتغير كمى متصل:

٥ –
١٠ –
١٥ –
٢٠ – ٢٥

(٧) فئات غير متساوية مقفلة لمتغير كمى متصل:

فئات مكتوبة بحدها الأدنى	فئات مكتوبة بحدها الأعلى
٥ –	– ٥
١٠ –	– ١٥
٢٠ –	– ٣٠
٢٨ – ٤٠	– ٥٠

(٨) فئات غير متساوية مفتوحة من البداية لمتغير كمى متصل:

فئات مكتوبة بحدها الأدنى	فئات مكتوبة بحدها الأعلى
أقل من ١٥	١٥
١٥ –	٢٠
٢٠ –	٣٠
٣٠ – ٥٠	٥٠

(٩) فئات غير متساوية مفتوحة من النهاية لمتغير كمى متصل:

فئات مكتوبة بحدها الأدنى	فئات مكتوبة بحدها الأعلى
٥ –	٥ – ١٠
١٠ –	٢٠
١٨ –	٣٥
٣٠ –	أكثر من ٣٥

(١٠) فئات غير متساوية مفتوحة من الطرفين لمتغير كمى متصل:

فئات مكتوبة بحدها الأدنى	فئات مكتوبة بحدها الأعلى
أقل من ٢٠	٢٠
٢٠ –	٢٥
٣٠ –	٣٢
٥٠ –	أكثر من ٣٢

بند (٢): جداول التوزيعات التكرارية:

(١) جدول توزيع تكرارى لمتغير واحد

Frequency Table for One Variable

ويطلق عليه جدول تكرارى بسيط Simple Frequency Table إذا كانت الظاهرة محل الدراسة عبارة عن متغير إحصائى واحد مثل أجور

العمال عن شهر يناير ١٩٩٧ ، أطوال عينة من طلبة كلية التجارة السنة الأولى فى العام الجامعى ١٩٩٧/١٩٩٨.

ويتم تقسيم بيانات الظاهرة على شكل فئات متساوية أو غير متساوية ثم تفرغ البيانات الفعلية للظاهرة داخل هذه الفئات وكل رقم يمثل بخط مستقيم عمودى بجوار الفئة ثم توضع خطوط متجاورة للبيانات الأخرى وكل ٥ خطوط تأخذ الشكل التالى: (卌) ويطلق عليها حزمة وذلك حتى يسهل عد أو حصر الأعداد المختلفة أمام كل فئة.

ويراعى دائماً عند تقسيم الفئات عدم تكرار أو تداخل حدود الفئات الدنيا والعليا بمعنى أنه عند تفريغ أو توزيع قراءة معينة لا يوجد لها مجال أو مدى إلا فئة واحدة فقط فى التقسيم أو الجدول.

ثم يتم عد أو حصر البيانات المفرغة على شكل خطوط وحزم متجاورة فى خانة العدد أو التكرار للوصول لجدول التوزيع التكرارى لمتغير واحد كما يتضح من الأمثلة التالية.

<u>مثال ١:</u>

فيما يلى عينة عشوائية من درجات مادة الإحصاء لعدد ٥٠ طالب من طلبة كلية التجارة جامعة القاهرة مجموعة (أ) عن العام الدراسى ٢٠١٤/٢٠١٥:

١٢ – ١٠ – ١٥ – ١٨ – ٦ – ٠ – ١١ – ١٣ – ١٦ – ١٢

١٠ – ١٥ – ١٧ – ٢٠ – ٨ – ١٤ – ٣ – ١٧ – ٥ – ١٨

١٦ – ١٣ – ١٢ – ١١ – ١٤ – ٥ – ٢ – ٢٠ – ١٢ – ١٠

٨ – ١٦ – ٤ – ١٤ – ١ – ١٥ – ١١ – ١٣ – ١٤ – ١٧

١٣ – ١٥ – ١٠ – ١٢ – ١٠ – ١١ – ٧ – ٣ – ١٤ – ٦

المطلوب: توزيع درجات الطلبة فى فئات غير متساوية ومنفصلة حسب التقديرات علماً بأن:

ضعيف جداً   من ٠ – ٦

ضعيف   من ٧ – ٩

مقبول   من ١٠ – ١٢

جيد   من ١٣ – ١٥

جيد جداً   من ١٦ – ١٧

ممتاز   من ١٨ – ٢٠

الحل:

يلاحظ أنه لا يوجد كسور فى درجات الطلبة فهى تمثل متغير منفصل مقسم إلى فئات غير متساوية مقفلة كما يلى:

جدول احصائى لمتغير واحد

الفئات	تفريغ العينة	العدد أو التكرار
٠ – ٦	~~||||~~ ~~||||~~	١٠
٧ – ٩	|||	٣
١٠ – ١٢	~~||||~~ ~~||||~~ ||||	١٤
١٣ – ١٥	~~||||~~ ~~||||~~ |||	١٣
١٦ – ١٧	~~||||~~		٦
١٨ – ٢٠	||||	٤
	المجموع	٥٠

وإذا رمزنا للفئات بالرمز ف وللعدد أو التكرار بالرمز ك يمكن استنتاج جدول توزيع تكرارى لمتغير واحد كما يلى :

جدول توزيع تكرارى لمتغير واحد

ف	ك
٠ – ٦	١٠
٧ – ٩	٣
١٠ – ١٢	١٤
١٣ – ١٥	١٣
١٦ – ١٧	٦
١٨ – ٢٠	٤
مجـــ ك	٥٠

مثال ٢:

فيما يلى عينة عشوائية من ٥٠ مسمار من أحد مصانع إنتاج المسامير الصلب وكانت أطوال هذه المسامير بالسنتيمتر كما يلى:

٢,١ – ٢,٥ – ١,٥ – ٣,٤ – ١,٧ – ٢,٨ – ٣,٦ – ٤ – ٣,٨ – ٤,٢

١,١ – ٤,٩ – ٢,٧ – ٢,٣ – ٣,٢ – ٤,١ – ٣,٥ – ٢,٥ – ٢,٦ – ١,٩

١,٨ – ٢,٤ – ٢,٥ – ٢,٩ – ٤,١– ١,٤ – ٢,٣ – ٣,٤ – ٣,٥ – ٤,٥

١,٧ – ٢,٦ – ٣,١ – ٤,٥ – ٢,٣– ٣,٢ – ٢,٤ – ١,٨ – ١,٣– ٣,٣

٢,٩ – ١,٨– ٤,٦ – ٢,٢ – ٤,٤– ١,٣ – ٤,٧ – ٣,٦ – ٢,٧ – ٣

وزع الأعداد السابقة فى فئات متساوية متصلة مناسبة

الحل:

جدول تفريغ بيانات لمتغير واحد

فئات الأطوال	تفريغ العينة	العدد أو التكرار
١ –	IIII	٤
١,٥ –	𝍸 II	٧
٢ –	𝍸 II	٧
٢,٥ –	𝍸 𝍸	١٠
٣ –	𝍸 II	٧
٣,٥ –	𝍸	٥
٤ –	𝍸	٥
٤,٥ – ٥	𝍸	٥
	المجموع	٥٠

جدول توزيع تكرارى لمتغير واحد

ف	ك
١ –	٤
١,٥ –	٧
٢ –	٧
٢,٥ –	١٠
٣ –	٧
٣,٥ –	٥
٤ –	٥
٤,٥ – ٥	٥
مجـــ ك	٥٠

(٢) جدول توزيع تكرارى لمتغيرين (الجدول المزدوج)
Frequency Table for Two Variable (Double Frequency Table)

إذا كانت الظاهرة محل الدراسة تشمل متغيرين معاً فى وقت واحد وعلى سبيل المثال إذا كنا بصدد إجراء دراسة على أطوال وأوزان مجموعة من الطلبة أو إجراء دراسة عن أجور وساعات العمل لعمال مصنع معين ، حيث يتم تفريغ بيانات العينة للمتغيرين معاً وفى الخانة المشتركة لفئتى البيان وذلك بنفس طريقة التفريغ السابقة لمتغير واحد وعلى شكل خطوط رأسية وحزم خماسية ثم يتم عد أو حصر الخطوط والحزم للوصول لجدول التوزيع التكرارى لمتغيرين معاً كما يتضح من المثال التالى:

مثال:

فيما يلى أطوال وأوزان عينة من عدد ٤٠ رياضياً فى القرية الأوليمبية:

رقم الرياضى	الطول	الوزن	رقم الرياضى	الطول	الوزن
١	١٧٠	٧٥	٢١	١٦٠	٦١
٢	١٧٥	٧٨	٢٢	١٦٧	٦٥
٣	١٨٢	٧٩	٢٣	١٩٠	٨٥
٤	١٦٥	٦٨	٢٤	١٨٨	٨٦
٥	١٧٢	٧٠	٢٥	١٨٢	٨٠
٦	١٧٦	٧٣	٢٦	١٧٧	٧٧
٧	١٧٣	٧٥	٢٧	١٦٥	٦٣
٨	١٦٥	٦٤	٢٨	١٧٤	٧٤
٩	١٧٠	٧٠	٢٩	١٨١	٨٢
١٠	١٧٥	٧٦	٣٠	١٧٥	٧٤
١١	١٧٩	٧٧	٣١	١٧١	٧٦
١٢	١٨٠	٨١	٣٢	١٦٦	٦٤
١٣	١٧٦	٧٧	٣٣	١٦٤	٦٥
١٤	١٧١	٧٠	٣٤	١٦٨	٧٠
١٥	١٦٩	٦٨	٣٥	١٧٣	٧٥
١٦	١٨٤	٨٥	٣٦	١٨٤	٨٥
١٧	١٨٠	٨٣	٣٧	١٨٧	٨٥
١٨	١٨٨	٨٧	٣٨	١٧٩	٨٠
١٩	١٧٠	٧٣	٣٩	١٦٦	٦٥
٢٠	١٦٧	٦٧	٤٠	١٦٥	٦٤

المطلوب: فرغ العينة السابقة فى فئات متساوية متصلة طول كل فئة ٥

الحل:

جدول تفريغ بيانات لمتغيرين

فئات الطول / فئات الوزن	١٦٠ –	١٦٥ –	١٧٠ –	١٧٥ –	١٨٠ –	١٨٥ – ١٩٠
٦٠ –	I	IIII	–	–	–	–
٦٥ –	I	IIII/	–	–	–	–
٧٠ –	–	I	IIII/	II	–	–
٧٥ –	–	–	IIII	IIII/	I	–
٨٠ –	–	–	–	I	IIII	–
٨٥ – ٩٠	–	–	–	–	II	IIII

جدول توزيع تكرارى لمتغيرين (الجدول المزدوج)

س / ص	١٦٠ –	١٦٥ –	١٧٠ –	١٧٥ –	١٨٠ –	١٨٠ – ١٨٥	$ك_{ص}$
٦٠ –	١	٤	–	–	–	–	٥
٦٥ –	١	٥	–	–	–	–	٦
٧٠ –	–	١	٥	٢	–	–	٨
٧٥ –	–	–	٤	٥	١	–	١٠
٨٠ –	–	–	–	١	٤	–	٥
٨٥–٩٠	–	–	–	–	٢	٤	٦
$ك_{س}$	٢	١٠	٩	٨	٧	٤	٤٠

يلاحظ على الجدول السابق ما يلى:

رمزنا لفئات الطول بالرمز س ومجموع تكرارات الطول بالرمز $ك_{س}$
ورمزنا لفئات الوزن بالرمز ص ومجموع تكرارات الوزن بالرمز $ك_{ص}$
ويمكن فصل الجدول المزدوج السابق إلى جدولين مستقلين كما يلى:

جدول توزيع تكرارى لمتغير واحد (الأطوال)

$ف_س$	$ك_س$
١٦٠ –	٢
١٦٥ –	١٠
١٧٠ –	٩
١٧٥ –	٨
١٨٠ –	٧
١٨٥ – ١٩٠	٤
مجــ كس	٤٠

جدول توزيع تكرارى لمتغير واحد (الأوزان)

$ف_ص$	$ك_ص$
٦٠ –	٥
٦٥ –	٦
٧٠ –	٨
٧٥ –	١٠
٨٠ –	٥
٨٥ – ٩٠	٦
مجــ كص	٤٠

بند (٣): جداول التوزيعات التكرارية المتجمعة:

Cumulative Frequency Tables

إذا حولنا الفئات إلى شرائح أو حدود عليا أو دنيا لتجميع التكرارات السابقة كلها أو اللاحقة كلها لحدود فئة معينة أُطلق على الجداول الناتجة جداول تكرارية متجمعة ، وعلى سبيل المثال قد نرغب فى مصنع من المصانع تحديد عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ١٥٠ جنيه ، ٢٠٠

جنيه أى داخل فئة أو مجموعة معينة وفى نفس الوقت إذا كنا نريد تحديد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ١٥٠ جنيه أو تحديد عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٢٠٠ جنيه نجد أن الفئة تحولت إلى حد أعلى فى الحالة الأولى وتحولت إلى حد أدنى فى الحالة الثانية.

مما سبق يمكن إعداد نوعين من جداول التوزيعات التكرارية المتجمعة:

(١) جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد:

وفيه يتم تحويل الفئات إلى حدود عليا ومن ثم يتم تجميع التكرارات السابقة لهذه الحدود العليا كما يتضح ذلك من المثالين التاليين:

مثال (١) (فئات مكتوبة بحدها الأدنى):

فيما يلى توزيع أجور عينة عشوائية من العاملين بأحد المصانع حجمها ١٠٠ عامل والمطلوب تكوين جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد:

فئات الأجر	١٠٠-	١٥٠-	٢٠٠-	٢٥٠-	٣٠٠-٣٥٠
عدد العمال	٢٠	٣٥	٢٥	١٥	٥

جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد

الفئات ف	التكرارات ك	الفئات المتجمعة الصاعدة	التكرارات المتجمعة الصاعدة
١٠٠ -	٢٠	أقل من ١٠٠	صفر (٠)
١٥٠ -	٣٥	أقل من ١٥٠	٢٠($ك_١$)
٢٠٠ -	٢٥	أقل من ٢٠٠	٥٥($ك_١+ك_٢$)
٢٥٠ -	١٥	أقل من ٢٥٠	٨٠($ك_١+ك_٢+ك_٣$)
٣٠٠-٣٥٠	٥	أقل من ٣٠٠	٩٥($ك_١+ك_٢+ك_٣+ك_٤$)
مجـــ ك	١٠٠	٣٥٠ فأقل	١٠٠($ك_١+ك_٢+ك_٣+ك_٤+ك_٥$)

واضح من الجدول السابق أن التكرارات المتجمعة متراكمة وتصاعدية بدأت من صفر ثم التكرار الأول ثم التكرار الأول والثانى وهكذا إلى أن وصلت إلى المجموع الكلى للتكرارات.

مثال (٢) (فئات مكتوبة بحدها الأعلى):

فيما يلى توزيع عدد ١٠٠ طالب اختيروا عشوائياً حسب درجاتهم فى مادة إدارة الأعمال والمطلوب تكوين جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد:

الدرجات	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-
عدد الطلبة	١٠	١٥	٢٥	٣٥	١٥

جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد

الفئات ف	التكرارات ك	الفئات المتجمعة الصاعدة	التكرارات المتجمعة الصاعدة
٤ –	١٠	٤ فأقل	١٠($ك_1$)
٨ –	١٥	٨ فأقل	٢٥($ك_1+ك_2$)
١٢ –	٢٥	١٢ فأقل	٥٠($ك_1+ك_2+ك_3$)
١٦ –	٣٥	١٦ فأقل	٨٥($ك_1+ك_2+ك_3+ك_4$)
٢٠ –	١٥	٢٠ فأقل	١٠٠($ك_1+ك_2+ك_3+ك_4+ك_5$)
مجـــ ك	١٠٠		

(٢) جدول التوزيع التكرارى المتجمع الهابط:

وفيه يتم تحويل الفئات إلى حدود دنيا ومن ثم يتم تجميع التكرارات اللاحقة لهذه الحدود الدنيا كما يتضح من إعادة حل المثالين السابقين:

مثال (١) (فئات مكتوبة بحدها الأدنى):

فئات الأجر	١٠٠-	١٥٠-	٢٠٠-	٢٥٠-	٣٠٠-٣٥٠
عدد العمال	٢٠	٣٥	٢٥	١٥	٥

جدول التوزيع التكرارى المتجمع الهابط

الفئات ف	التكرارات ك	الفئات المتجمعة الصاعدة	التكرارات المتجمعة الصاعدة
١٠٠ –	٢٠	١٠٠ فأكثر	١٠٠ $(ك_{١}+ك_{٢}+ك_{٣}+ك_{٤}+ك_{٥})$
١٥٠ –	٣٥	١٥٠ فأكثر	٨٠ $(ك_{٢}+ك_{٣}+ك_{٤}+ك_{٥})$
٢٠٠ –	٢٥	٢٠٠ فأكثر	٤٥ $(ك_{٣}+ك_{٤}+ك_{٥})$
٢٥٠ –	١٥	٢٥٠ فأكثر	٢٠ $(ك_{٤}+ك_{٥})$
٣٠٠–٣٥٠	٥	٣٠٠ فأكثر	٥ $(ك_{٥})$
مجـــ ك	١٠٠	أكثر من ٣٥٠	صفر (٠)

واضح من الجدول السابق أن التكرارات المتجمعة تنازلية أو متناقصة بدأت بمجموع التكرارات ثم تناقصت بمقدار التكرار الأول ثم التكرار الأول والثانى وهكذا إلى أن تلاشت تماماً.

<u>مثال (٢) (فئات مكتوبة بحدها الأعلى):</u>

الدرجات	٤–	٨ –	١٢ –	١٦–	٢٠ –
عدد الطلبة	١٠	١٥	٢٥	٣٥	١٥

جدول التوزيع التكرارى المتجمع الهابط

الفئات ف	التكرارات ك	الفئات المتجمعة الصاعدة	التكرارات المتجمعة الصاعدة
٤ –	١٠	صفر فأكثر	١٠٠ $(ك_{١}+ك_{٢}+ك_{٣}+ك_{٤}+ك_{٥})$
٨ –	١٥	أكثر من ٤	٩٠ $(ك_{٢}+ك_{٣}+ك_{٤}+ك_{٥})$
١٢ –	٢٥	أكثر من ٨	٧٥ $(ك_{٣}+ك_{٤}+ك_{٥})$
١٦ –	٣٥	أكثر من ١٢	٥٠ $(ك_{٤}+ك_{٥})$
٢٠ –	١٥	أكثر من ١٦	١٥ $(ك_{٥})$
مجـــ ك	١٠٠	أكثر من ٢٠	صفر (٠)

تمارين على الفصل الثانى

١- فيما يلى عينة عشوائية من درجات ٦٠ طالب فى مادة الرياضة البحتة لطلبة كلية التجارة جامعة القاهرة:

١٥ – ١٤ – ١٠ – ١٢ – ٦ – ٢٠ – ١٩ – ١٦ – ١٣ – ١٢ – ١٠ – ١٥

٣ – ١٨ – ١٦ – ١٠ – ١١ – ١٢ – ١٤ – ١٥ – ٦ – ٢ – ١٣ – ٤

١٤ – ١٠ – ١١ – ٨ – ٢ – ١ – ٦ – ١٣ – ١٧ – ١٨ – ٢ – ١٠

١٣ – ١١ – ١٧ – ١٦ – ١٥ – ١٩ – ٢٠ – ٤ – ١٣ – ١٢ – ١٠ – ١٥

٦ – ٧ – ١٦ – ١٥ – ١٤ – ١٣ – ١٢ – ١٥ – ٥ – ١٢ – ١٤ – ١٧

المطلوب توزيع الطلبة فى ٥ فئات متساوية غير متصلة وتكوين جدول توزيع تكرارى لمتغير واحد.

٢- فيما يلى الفروق فى أطوال نوع من قطع غيار السيارات بالملليميتر فى عينة عشوائية حجمها ٥٠ قطعة:

٢ – ٢,٥ – ٣ – ١,٥ – ١,٢٥ – ٢,٢ – ٣,٢ – ٣,٦ – ١,٥ – ١,٧

٤ – ٢,٤ – ٢,٣ – ٢,٧ – ٢,٥ – ٣,١ – ٣,٣ – ٣,٥ – ١,٧ – ٢,٦

٤,٥ – ٤,٣ – ٣,٢ – ٢,٤ – ١,٨ – ١,٢ – ١,١ – ٢,٢ – ٢,٣ – ٣,٤

٤,٨ – ٠,٨ – ٠,٥ – ١,٥ – ١,٣ – ٢,٤ – ٣,٦ – ٣,٥ – ٤,٦ – ١,٨

٢,٦ – ٣,٤ – ١,٢ – ٠,٦ – ٤,٢ – ٤,٣ – ٣,١ – ٢,٤ – ١,٩ – ١,١

المطلوب تفريغ العينة السابقة فى فئات متساوية ومتصلة مناسبة وتكوين جدول توزيع تكرارى لمتغير واحد.

٣- فيما يلى عينة عشوائية من أجور عمال مصنع وعدد الوحدات المنتجة فى اسبوع إذا كان حجم العينة ٥٠ عامل:

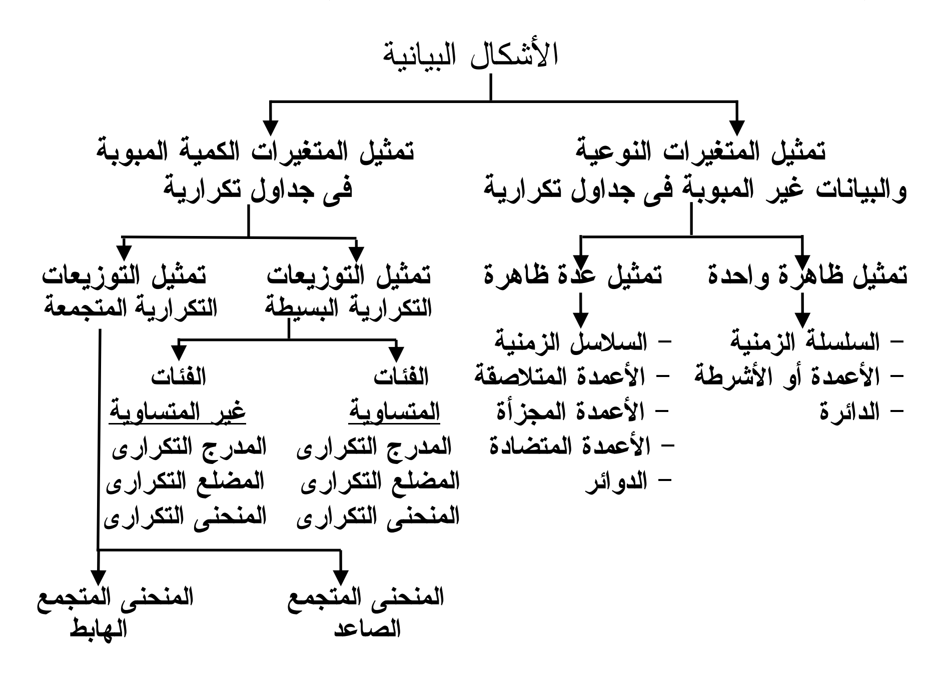
العامل	الأجر	عدد الوحدات المنتجة	العامل	الأجر	عدد الوحدات المنتجة
١	٢٠	١٥	٢٦	٣٢	١٦
٢	٢٥	١٨	٢٧	٤٣	١٥
٣	٤٠	١٦	٢٨	٤٧	٢٣
٤	٣٥	١٧	٢٩	٣٤	٣٢
٥	٢٧	١٢	٣٠	٢٤	١٧
٦	١٥	٢٠	٣١	١٥	١٤
٧	١٢	١٥	٣٢	١٨	١٣
٨	٢٤	١٦	٣٣	١٧	٢١
٩	٤٥	٢٠	٣٤	٣٥	١٢
١٠	٣٢	١٠	٣٥	٤٤	١٥
١١	٣٦	١٤	٣٦	٥٢	٣٤
١٢	٢٤	١٧	٣٧	٢٦	١٦
١٣	٣٤	١٥	٣٨	٣١	١٤
١٤	٤٦	١٤	٣٩	٣٩	١٣
١٥	٣٥	١٨	٤٠	٢٥	٢٣
١٦	١٧	٢٥	٤١	٢٨	٢٥
١٧	٥٣	٢٧	٤٢	٢٦	١٤
١٨	٤٨	١٢	٤٣	١٤	١٠
١٩	٥٠	٢٣	٤٤	١٨	١٥
٢٠	٢٥	١٤	٤٥	٢٦	٢٢
٢١	٣٥	١٦	٤٦	٤٦	٢٥
٢٢	١٥	١٠	٤٧	٤٧	٢٧
٢٣	١٧	١٣	٤٨	٥٠	٢٩
٢٤	٣٦	٢٥	٤٩	٤٨	٣٠
٢٥	٣٠	٢٨	٥٠	٢٦	٣٥

فرغ بيانات العينة السابقة فى جدول توزيع تكرارى مزدوج فى شكل فئات متساوية متصلة.

الفصل الثالث
العرض البيانى
Graphical Presentation

مقدمة:

يتم عرض الظواهر والمتغيرات المختلفة سواء كانت متغيرات وصفية أو كمية مبوبة أو غير مبوبة فى جداول تكرارية فى شكل رسم بيانى مناسب بهدف العرض الدقيق الواضح للظواهر المختلفة إما لبيان تطورها التاريخى أو لإجراء المقارنات وتحديد العلاقات بين المتغيرات المختلفة ، وتتم دراستنا فى هذا الفصل وفقاً للتبويب والتقسيم التالى:



بند (١): تمثيل المتغيرات النوعية والبيانات غير المبوبة:

أولاً: تمثيل ظاهرة واحدة:

(١) السلسلة الزمنية Time Series

السلسلة الزمنية عبارة عن علاقة بين متغيرين أحدهما الزمن والآخر أحد الظواهر الاقتصادية الهامة. وتبين السلسلة الزمنية التطور التاريخى أو الزمنى للظاهرة على مدار مجموعة من السنوات أو الفترات الزمنية المتتالية والمنتظمة ، ويمكن توضيح شكل السلسلة الزمنية من خلال المثال التالى.

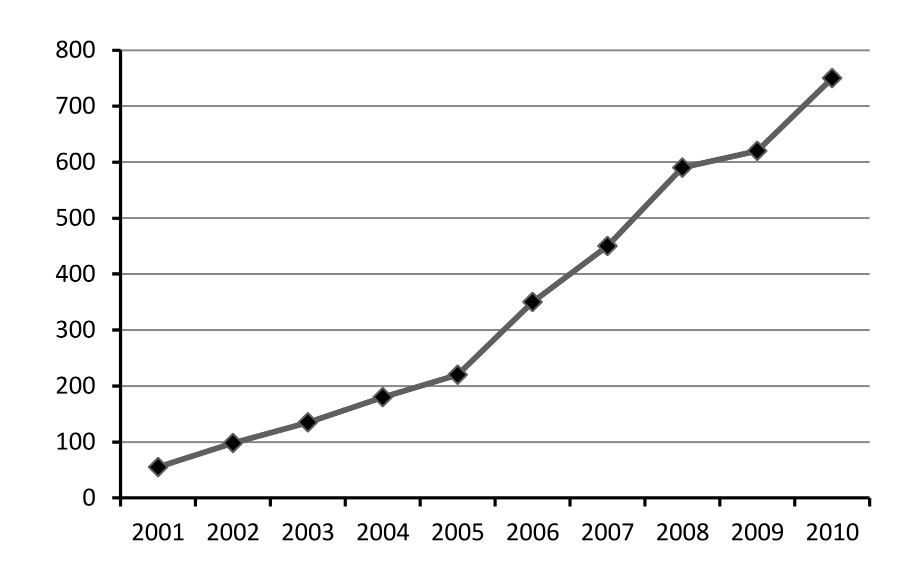
مثال:

فيما يلى بيان بتطور الصادرات المصرية من سلعة معينة بالألف جنيه مصرى:

السنة	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠
الصادرات	٥٥	٩٨	١٣٥	١٨٠	٢٢٠	٣٥٠	٤٥٠	٥٩٠	٦٢٠	٧٥٠

الحل:

يتم تمثيل السنوات على المحور الأفقى بمسافات متساوية ويتم تمثيل قيم الصادرات على المحور الرأسى بمسافات متساوية كما يلى:



(٢) الأعمدة أو الأشرطة Bar or Column Charts

يتم تمثيل المتغير النوعى أو المتغير الكمى غير المبوب على المحور الأفقى والقيم على المحور الرأسى. وتكون القيم على المحور الرأسى على مسافات متساوية تبدأ بالصفر من نقطة الأصل ، ويمثل كل متغير بعمود ارتفاعه يساوى قيمة المتغير وعرض العمود على المحور الأفقى يكون متساوى لجميع الأعمدة ويترك بين الأعمدة مسافات متساوية ويراعى أن المسافة المتروكة بين كل عمودين تكون أقل من قاعدة العمود.

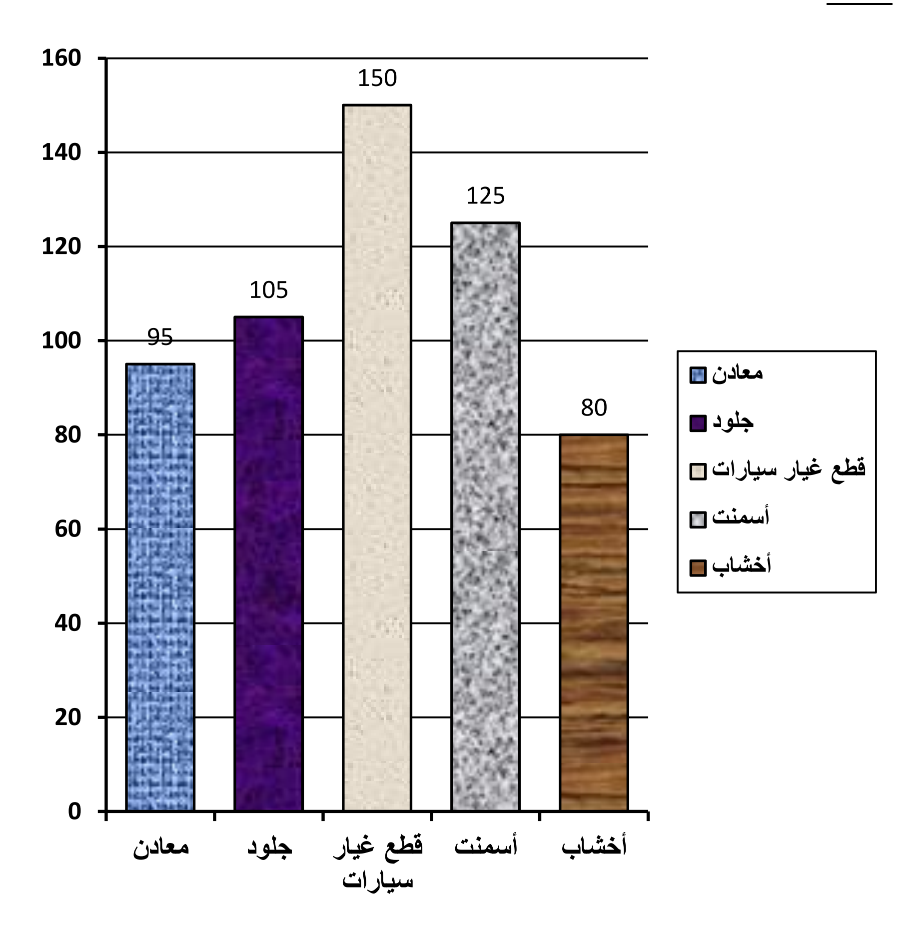
ويكون لكل عمود لون أو شكل مختلف ويمكن كتابة قيمة كل عمود أعلاه ويكون للرسم مفتاح يبين شرح كل عمود بنفس اللون أو الشكل.

مثال:

اعرض بيانات الجدول التالى فى شكل أعمدة

الواردات	معادن	جلود	قطع غيار سيارات	اسمنت	أخشاب
القيمة بالمليون	٩٥	١٠٥	١٥٠	١٢٥	٨٠

الحل:



(٣) الدائرة Pie Chart

تعبر المساحة الكلية للدائرة (٣٦٠°) عن اجمالى قيم المتغير النوعى أو الكمى غير المبوب ولذلك يتم تحويل القيم المختلفة للمتغير إلى درجات مقابلة وذلك بعد تحويل القيم المختلفة المطلقة للمتغير إلى قيم نسبية ثم توزيع درجات مركز الدائرة (٣٦٠°) على هذه القيم النسبية ، ويتم رسم دائرة بحجم مناسب ثم يرسم نصف قطر الدائرة ونبدأ بقياس المساحة الأولى للمتغير بالدرجات على المنقلة من نصف القطر وهكذا إلى أن يتم توزيع درجات الدائرة كاملة على النسب المختلفة للمتغير كما يتضح من المثال التالى.

مثال:

اعرض بيانات الجدول التالى فى شكل دائرة مناسبة:

الغلة	ذرة	شعير	قطن	قمح	المجموع
الانتاج بالألف جنيه	٢٧٠	١٨٠	٤٠٥	٢٢٥	١٠٨٠

الحل:

الدرجة = $\frac{\text{قيمة المتغير}}{\text{مجموع القيم}}$ X ٣٦٠ ° = القيمة النسبية للمتغير X ٣٦٠ °

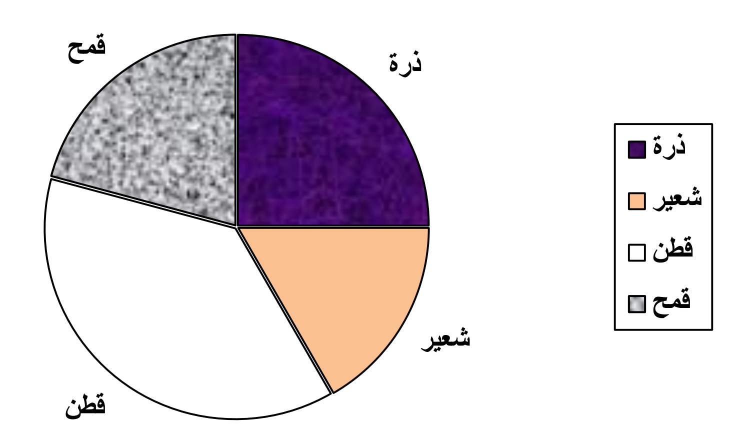
الدرجة التى تقابل الذرة = $\frac{٢٧٠}{١٠٨٠}$ X ٣٦٠ ° = ٩٠ °

الدرجة التى تقابل الشعير = $\frac{١٨٠}{١٠٨٠}$ X ٣٦٠ ° = ٦٠ °

الدرجة التى تقابل القطن = $\frac{٤٠٥}{١٠٨٠}$ X ٣٦٠ ° = ١٣٥ °

الدرجة التى تقابل القمح = $\frac{٢٢٥}{١٠٨٠}$ X ٣٦٠ ° = ٧٥ °

٣٦٠ °



ثانياً : تمثيل عدة ظواهر :

(١) السلاسل الزمنية Time Series

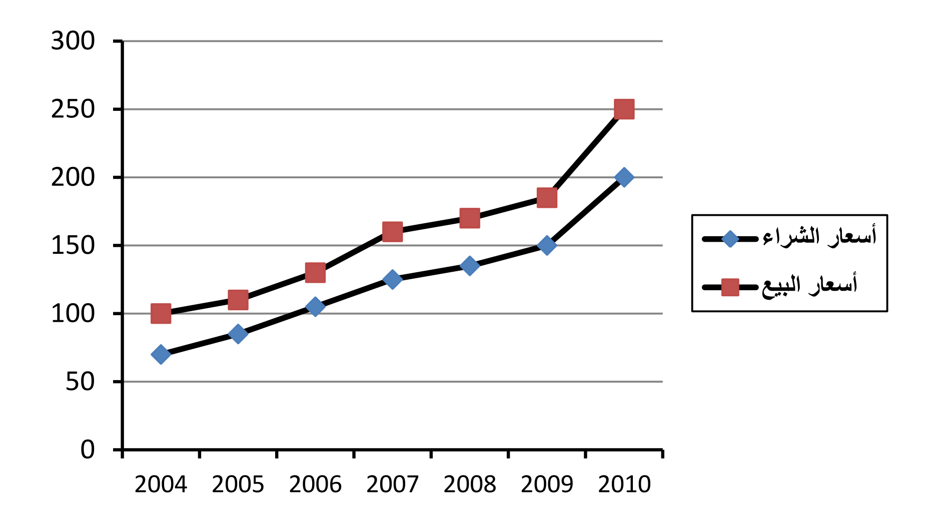
إذا كان لدينا عدة ظواهر يتم تمثيل كل ظاهرة بسلسلة زمنية على نفس الرسم البيانى وبنفس القواعد السابقة كما يتضح من المثال التالى.

مثال:

اعرض الجدول التالى فى شكل سلاسل زمنية:

السنة	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠
أسعار الشراء	٧٠	٨٥	١٠٥	١٢٥	١٣٥	١٥٠	٢٠٠
أسعار البيع	١٠٠	١١٠	١٣٠	١٦٠	١٧٠	١٨٥	٢٥٠

الحل:



يتضح من الرسم السابق ما يلى:

- يمثل الخط البيانى العلوى السلسلة الزمنية للمبيعات.
- يمثل الخط البيانى السفلى السلسلة الزمنية للمشتريات.
- تمثل المساحة بينهما الفرق بين رقمى المبيعات والمشتريات (حجم الأرباح)

(٢) الأعمدة المتلاصقة Grouped Bars

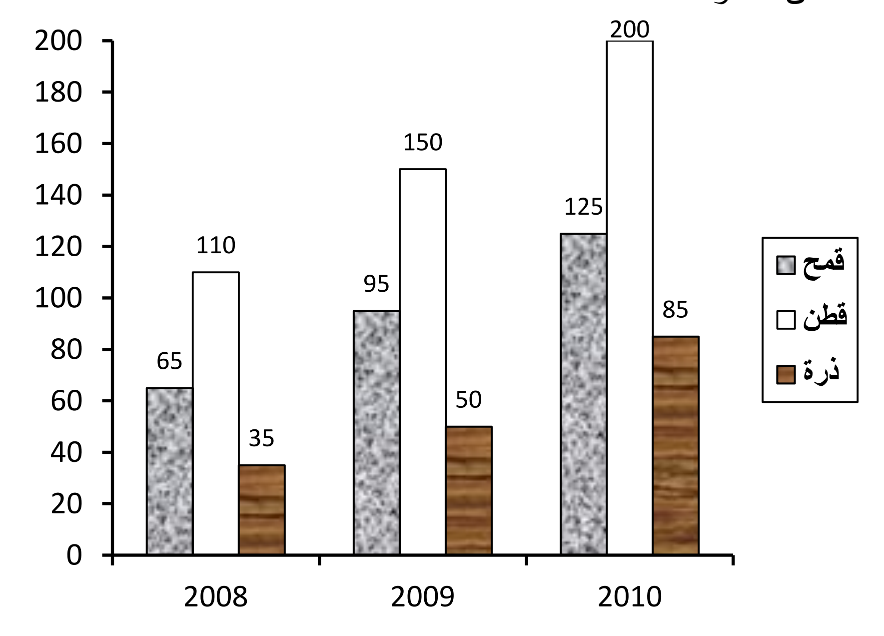
يتم تمثيل كل مجموعة من الظواهر أو كل مجموعة من المتغيرات بمجموعة متلاصقة من الأعمدة ويراعى تساوى قواعد الأعمدة المتلاصقة على المحور الأفقى على أن يترك بين كل مجموعة من الأعمدة المتلاصقة مسافات متساوية.

مثال:

اعرض البيانات التالية فى شكل أعمدة متلاصقة

الغلة / السنوات	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	المجموع
قمح	٦٥	٩٥	١٢٥	٢٨٥
قطن	١١٠	١٥٠	٢٠٠	٤٦٠
ذرة	٣٥	٥٠	٨٥	١٧٠
المجموع	٢١٠	٢٩٥	٤١٠	٩١٥

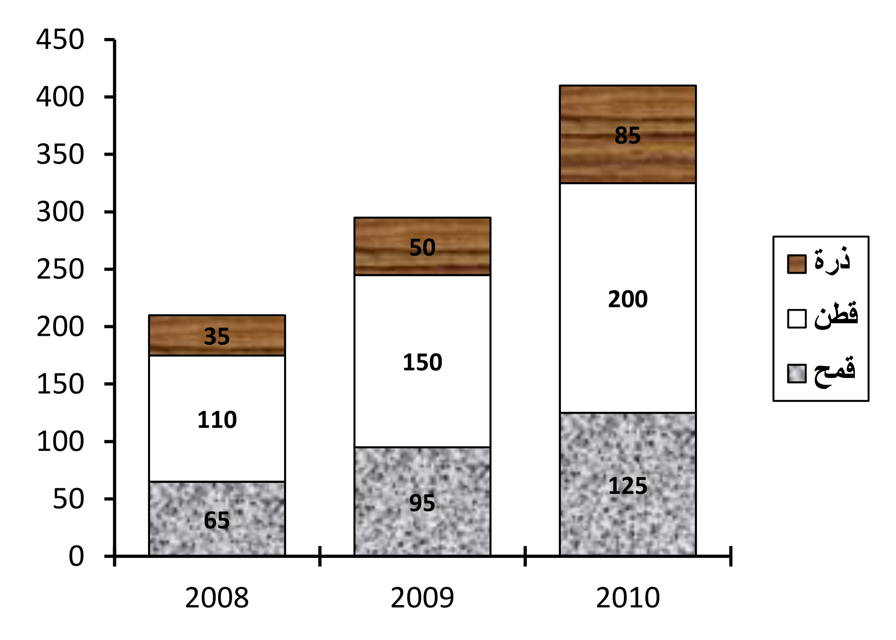
يمكن عمل ثلاث مجموعات من الأعمدة المتلاصقة كل مجموعة تمثل سنة ميلادية وكل مجموعة تتكون من ثلاث أعمدة يمثل كل عمود منها غلة من الغلال كما يمكن عمل عمود رابع ملاصق بمجموع الغلال ، ويمكن أيضا عمل ثلاث مجموعات من الأعمدة المتلاصقة كل مجموعة تمثل غلة تتكون من ثلاث أعمدة متلاصقة كل عمود منها يمثل سنة ميلادية ، كما يمكن عمل عمود رابع ملاصق يمثل اجمالى الإنتاج فى كل سنة من السنوات الثلاث.



(٣) الأعمدة المجزأة Component-Part Bar

بمقتضاها يتم تمثيل مجموع قيم كل ظاهرة بعمود يتم تقسيمه أو تجزئته حسب القيم الفرعية المختلفة المكونة للظاهرة وتمتاز هذه الطريقة بأن العمود الواحد يمثل الجموع الكلى لقيم الظاهرة بالإضافة إلى القيم الفرعية للمتغير وبالتالى يحتاج لمساحة أقل فى الرسم البيانى بالمقارنة بطريقة الأعمدة المتلاصقة.

ويمكن حل لمثال السابق بطريقة الأعمدة المجزأة كما يلى:



(٤) طريقة الأعمدة المتضادة Duo-Directional Bar Chart

إذا كان لدينا ظاهرتين إحداهما ذات قيم موجبة والأخرى ذات قيم سالبة مثل درجات الحرارة – الأرباح والخسائر – الميزان التجارى لبعض الدول فيتم تقسيم صفحة الرسم البيانى إلى قسمين أعلى وأسفل المحور

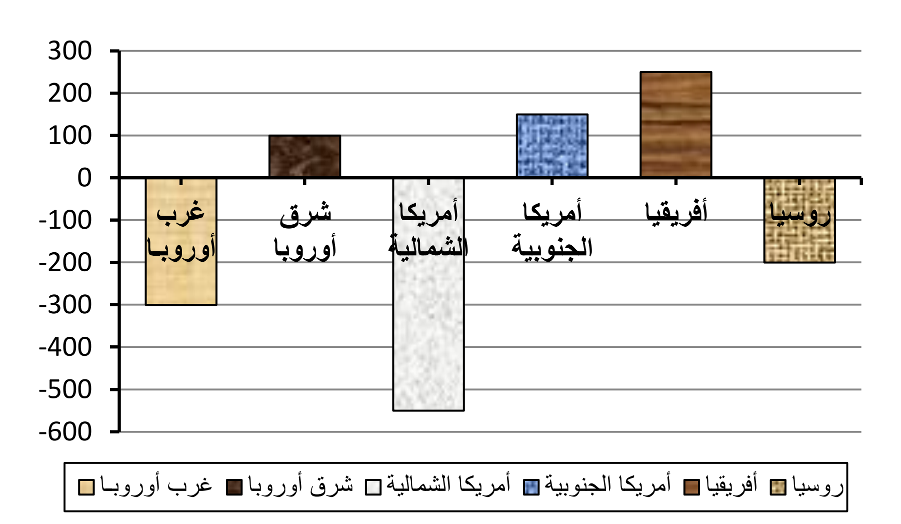
الأفقى ، حيث تمثل القيم الموجبة أعلى المحور الأفقى والقيم السالبة أسفل المحور الأفقى.

مثال :

فيما يلى الميزان التجارى بين مصر وبعض الدول: (القيم بالمليون جنيه)

الدولة	غرب أوروبا	شرق أوروبا	أمريكا الشمالية	أمريكا الجنوبية	أفريقيا	روسيا
الميزان التجارى	٣٠٠-	١٠٠+	٥٥٠-	١٥٠+	٢٥٠+	٢٠٠-

الحل:



(٥) الدوائر Pies

إذا كان لدينا عدة ظواهر والمطلوب عرضها على شكل دوائر ، يتم تمثيل كل ظاهرة بدائرة مستقلة على أن تتناسب مساحات الدوائر المختلفة مع اجمالى قيم كل ظاهرة على حدة وبعد تحديد نصف قطر كل دائرة يتم تقسيم الدائرة (٣٦٠ °) على المتغير النوعى النسبى لكل ظاهرة على حدة كما يلى:

بفرض أن لدينا ظاهرتين فقط:

$$\frac{\text{مجموع قيم الظاهرة الأولى}}{\text{مجموع قيم الظاهرة الثانية}} = \frac{\text{مساحة الدائرة الأولى}}{\text{مساحة الدائرة الثانية}}$$

$$= \frac{\text{ط نق}_{١}^{٢}}{\text{ط نق}_{٢}^{٢}} = \frac{\text{نق}_{١}^{٢}}{\text{نق}_{٢}^{٢}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{\text{مجموع قيم الظاهرة الأولى}}}{\sqrt{\text{مجموع قيم الظاهرة الثانية}}} = \frac{\text{نق}_{١}}{\text{نق}_{٢}}$$

وهكذا إذا كان لدينا أكثر من ظاهرتين فإن النسبة بين أنصاف الأقطار للدوائر المختلفة الممثلة لكل ظاهرة على حدة كالنسبة بين الجذور التربيعية لإجمالى قيم كل ظاهرة على حدة كما يلى:

$$\text{نق}_{١} : \text{نق}_{٢} : \text{نق}_{٣}$$

$$\sqrt{\text{مجموع قيم الظاهرة ١}} : \sqrt{\text{مجموع قيم الظاهرة ٢}} : \sqrt{\text{مجموع قيم الظاهرة ٣}}$$

<u>مثال :</u>

اعرض الجدول التالى فى شكل دوائر مناسبة

الغلة \ السنة	٢٠٠٧	٢٠٠٩
قمح	٣٠	٧٥
قطن	٥٠	١٠٠
ذرة	٢٠	٥٠
المجموع	١٠٠	٢٢٥

الحل:

يتم تمثيل كل سنة بدائرة مستقلة ولتحديد أنصاف أقطار كل دائرة على حدة نجد أن:

نق$_{١}$: نق$_{٢}$

$\sqrt{١٠٠}$: $\sqrt{٢٢٥}$

١٠ : ١٥

٢ سم : ٣ سم

<u>توزيع درجات الدائرة الأولى لعام ٢٠٠٧ على القيم النسبية للغلال:</u>

الدرجة التى تقابل القمح = $\frac{٣٠}{١٠٠}$ X ٣٦٠° = ١٠٨°

الدرجة التى تقابل القطن = $\frac{٥٠}{١٠٠}$ X ٣٦٠° = ١٨٠°

الدرجة التى تقابل الذرة = $\frac{٢٠}{١٠٠}$ X ٣٦٠° = ٧٢°

٣٦٠°

توزيع درجات الدائرة الثانية لعام ٢٠٠٩ على القيم النسبية للغلال:

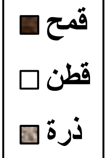
الدرجة التى تقابل القمح = $\frac{٧٥}{٢٢٥}$ X ٣٦٠ ° = ١٢٠ °

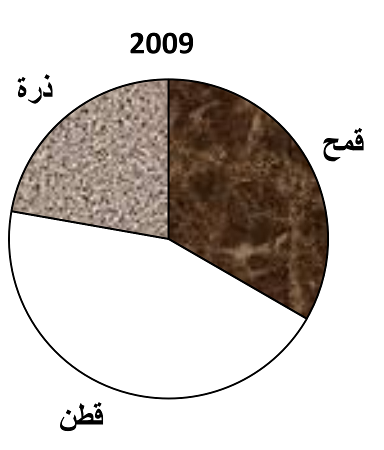
الدرجة التى تقابل القطن = $\frac{١٠٠}{٢٢٥}$ X ٣٦٠ ° = ١٦٠ °

الدرجة التى تقابل الذرة = $\frac{٥٠}{٢٢٥}$ X ٣٦٠ ° = ٨٠ °

٣٦٠ °







بند (٢): تمثيل المتغيرات الكمية المبوبة فى جداول تكرارية:

أولاً: تمثيل التوزيعات التكرارية البسيطة:

١- تمثيل الفئات المتساوية:

أ. المدرج التكرارى Histogram

يتم تمثيل التكرارات على المحور الرأسى بمقياس رسم مناسب ويتم تمثيل الفئات المتساوية على المحور الأفقى بمسافات متساوية وبمقياس رسم مناسب أيضاً ، ويتم تمثيل كل فئة بعمود ارتفاعه يمثل التكرار وقاعدته تمثل طول الفئة وتكون الأعمدة متصلة أو متلاصقة لأن الفئات متصلة , وتظلل الأعمدة كلها بلون واحد لأننا بصدد عرض متغير واحد فقط ، ويتم المقارنة بين ارتفاعات الأعمدة لأن القواعد متساوية وثابتة ، ومساحة الأعمدة تعبر عن حجم التكرارات ومجموع مساحات الأعمدة تعبر عن المجموع الكلى للتكرارات.

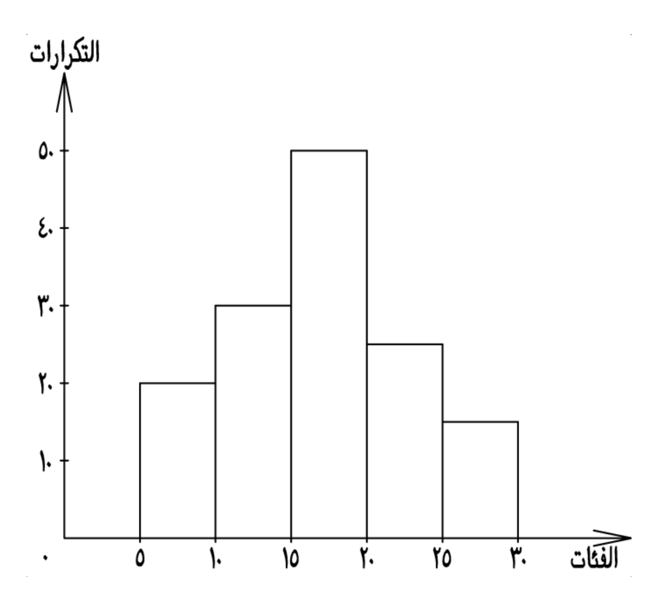
وبما أن القاعدة الثابتة وهى طول الفئة لذلك عند المقارنة يتم المقارنة بين ارتفاعات الأعمدة فقط.

مثال:

ارسم المدرج التكرارى للتوزيع التالى:

فئات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-٣٠
تكرارات	٢٠	٣٠	٥٠	٢٥	١٥

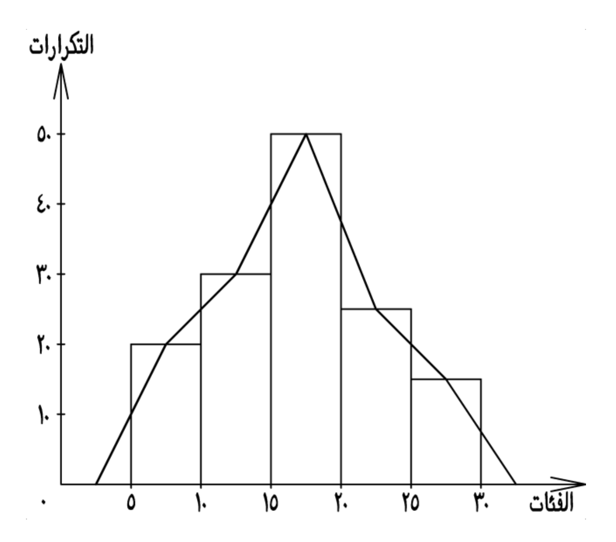
الحل:



ب. المضلع التكرارى Frequency Polygon

يمكن رسم المضلع التكرارى مع المدرج التكرارى وذلك بأن ننصف رؤوس الأعمدة بنقط أى نضع نقط فوق مراكز الفئات وبجانب كل قيمة أو تكرار على حدة ثم نصل بين كل نقطتين بخط مستقيم والخط المنكسر الناتج يطلق عليه المضلع التكرارى.

حل المثال السابق برسم المضلع التكرارى:



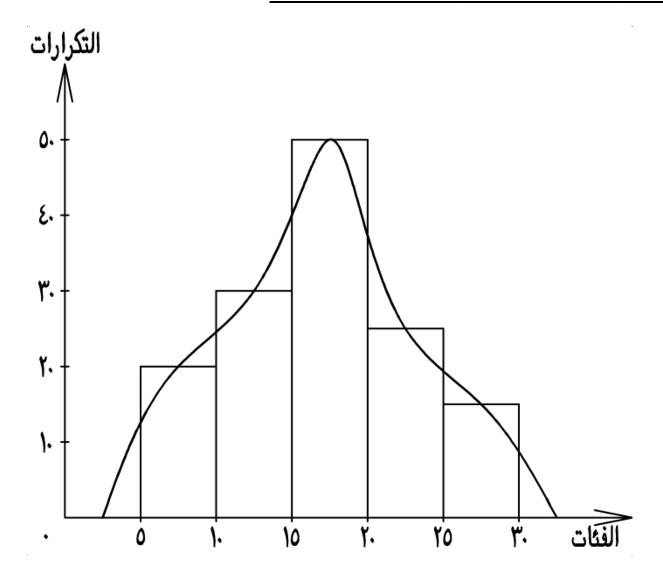
ويلاحظ من الرسم السابق أن المساحة المحصورة بين المضلع التكرارى والمحور الأفقى هى نفس مساحة المدرج التكرارى (مجموع مساحات الأعمدة المختلفة) فهناك مساحات خارج المضلع التكرارى وتدخل مع المدرج التكرارى والعكس هناك مساحات تدخل تحت المضلع التكرارى ولا تدخل ضمن مساحة المدرج التكرارى وهذه المساحات الداخلة والخارجة عبارة عن مساحات مثلثات متطابقة تماماً ، كما يمكن رسم المضلع التكرارى بدون رسم المدرج التكرارى وذلك بأن نضع نقط فوق مراكز الفئات وأمام التكرارات الممثلة لها ثم نصل بين كل نقطتين بخط مستقيم.

جـــ. المنحنى التكرارى Frequency Curve

عبارة عن المضلع التكرارى ولكن بعد تمهيد خطوط المضلع التكرارى المستقيمة والمنكسرة بحيث لا يوجد نقط ركنية ، ويمكن أيضاً رسم المنحنى التكرارى عن طريق المدرج التكرارى وذلك بأن ننصف رؤوس الأعمدة بنقط أى نضع نقط أمام مراكز الفئات ثم يتم تمهيد منحنى يمر

بهذه النقط وأيضاً المساحة المحصورة بين المنحنى التكرارى والمحور الأفقى هى نفس المساحة المحصورة بين المضلع التكرارى والمحور الأفقى وهى نفس مساحة المدرج التكرارى ممثلاً فى مساحات الأعمدة المختلفة.

<u>رسم المنحنى التكرارى فى المثال السابق:</u>



<u>٢- تمثيل الفئات غير المتساوية:</u>

فى الفئات المتساوية يتم المقارنة بين ارتفاعات الأعمدة المختلفة لأن القواعد متساوية ولكن إذا اختلفت أطوال الفئات لا نستطيع المقارنة بين ارتفاعات الأعمدة إلا إذا عدلنا التكرارات للوحدة الواحدة من طول الفئة وبمعنى آخر نقوم بحساب تكرارات معدلة وذلك بقسمة كل تكرار على طول الفئة المناظرة ويمثل التكرار المعدل متوسط نصيب وحدة الطول الواحدة داخل الفئة من كل تكرار ثم نقوم برسم التكرارات المعدلة بدلاً

من التكرارات الأصلية وهنا يمكن المقارنة بين ارتفاعات هذه التكرارات المعدلة حيث أن كلها تمثل تكرارات لوحدة طول واحدة داخل كل فئة وبالتالى يلغى تأثير أطوال الفئات المختلفة ويتم المقارنة بين ارتفاعات التكرارات المعدلة.

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}}$$

أ. المدرج التكرارى Histogram

يتم تمثيل الفئات غير المتساوية بأطوالها الفعلية على المحور الأفقى وبمقياس رسم مناسب ويتم تمثيل التكرارات المعدلة على المحور الرأسى ويتم رسم المدرج التكرارى بنفس القواعد السابقة:

مثال:

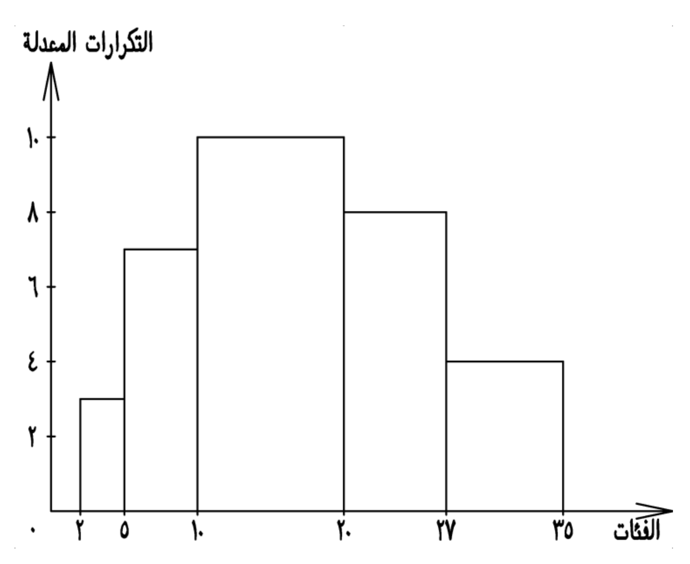
ارسم المدرج التكرارى للتوزيع التالى:

فئات	٢-	٥-	١٠-	٢٠-	٢٧-٣٥
تكرارات	٩	٣٥	١٠٠	٥٦	٣٢

الحل:

جدول التكرارات المعدلة

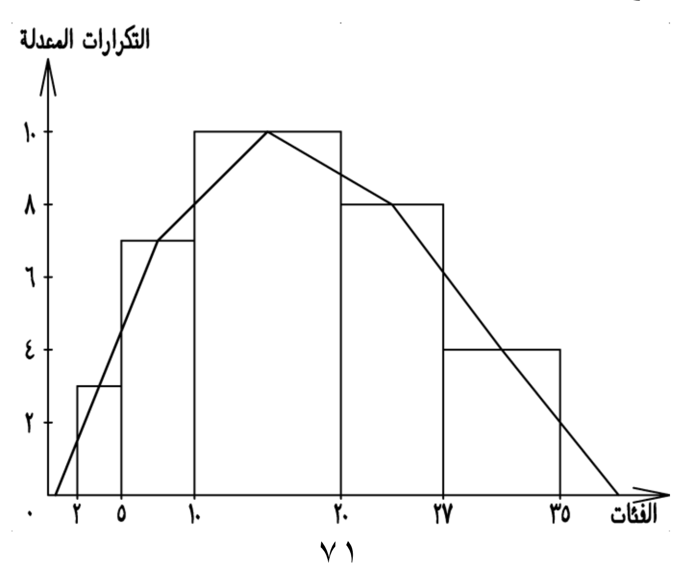
الفئات ف	التكرارات ك	طول الفئة ط	التكرار المعدل كَ
٢-	٩	٣	٣
٥-	٣٥	٥	٧
١٠-	١٠٠	١٠	١٠
٢٠-	٥٦	٧	٨
٢٧-٣٥	٣٢	٨	٤



ب. المضلع التكرارى Frequency Poiygon

بنفس الطريقة السابقة ننصف رؤوس أعمدة المدرج التكرارى المرسوم على أساس التكرارات المعدلة ، أى نضع نقط أمام مراكز الفئات ثم نصل بين كل نقطتين بخط مستقيم للحصول على المضلع التكرارى.

رسم المضلع التكرارى فى المثال السابق:

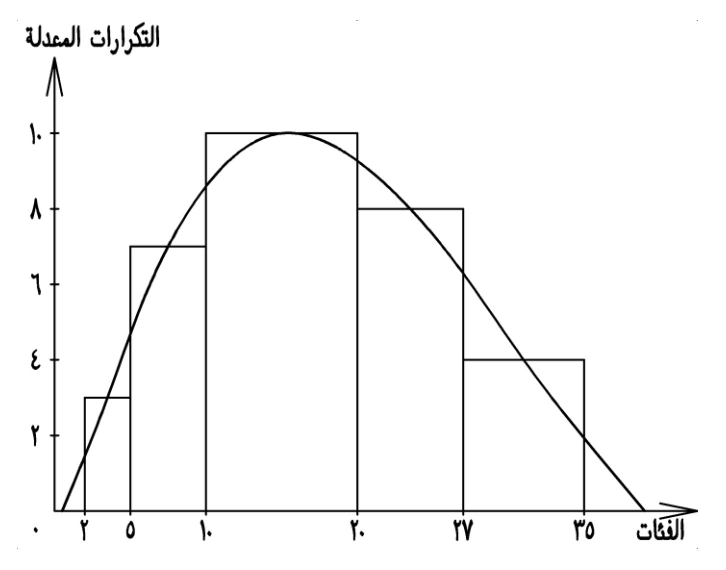


ويلاحظ أننا قفلنا المضلع التكرارى على المحور الأفقى وذلك بفرض أن طول الفئة قبل الفئة الأولى تعادل طول الفئة الأولى تماماً وطول الفئة بعد الفئة الأخيرة تعادل طول الفئة الأخيرة تماماً حتى تتساوى المساحة المحصورة بين المضلع التكرارى والمحور الأفقى مع مساحة المدرج التكرارى تماماً.

جـــ. المنحنى التكرارى Frequency Curve

يمكن رسم المنحنى التكرارى عن طريق المدرج التكرارى وذلك بأن ننصف رؤوس الأعمدة بنقط أى يتم وضع نقط أمام التكرارات وفوق مراكز الفئات ويتم التوصيل بين هذه النقط بمنحنى ممهد أو يتم رسم المنحنى التكرارى بدون المدرج التكرارى كما يتضح من حل المثال السابق للتكرارات المعدلة.

رسم المنحنى التكرارى فى المثال السابق:



وبنفس الطريقة السابقة قفلنا المنحنى التكرارى مع المحور الأفقى.

مثال:

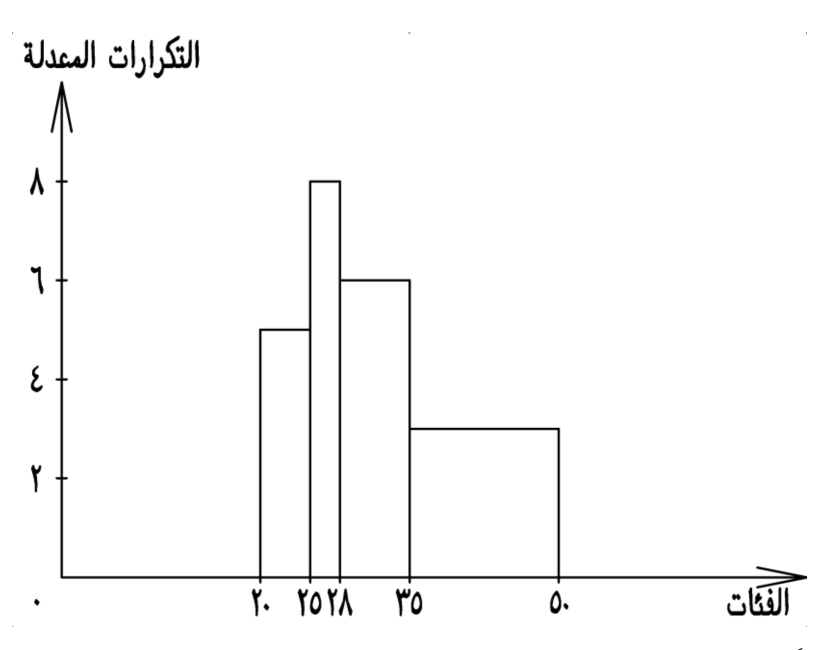
ارسم المدرج التكرارى للتوزيع التالى:

ف	ك
٢٠-	١٠
٢٥-	٢٥
٢٨-	٢٤
٣٥-	٤٢
٥٠-	٤٥
أكثر من ٥٠	٥

الحل:

يلاحظ أن الجدول السابق مفتوح من الطرفين (من بدايته ومن نهايته) وعند رسم المدرج التكرارى لابد من تعديل التكرارات أولاً ثم تهمل الفئة الأولى بتكراراتها والفئة الأخيرة بتكراراتها عند الرسم كما يلى:

ف	ك	ط	كَ
٢٠-	١٠	-	-
٢٥-	٢٥	٥	٥
٢٨-	٢٤	٣	٨
٣٥-	٤٢	٧	٦
٥٠-	٤٥	١٥	٣
أكثر من ٥٠	٥	-	-



ثانياً: تمثيل التوزيعات التكرارية المتجمعة:

(١) المنحنى المتجمع الصاعد:

لرسم المنحنى المتجمع الصاعد لابد من إعداد جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد أولاً ثم تمثل الحدود العليا للفئات على المحور الأفقى والتكرارات المتجمعة الصاعدة على المحور الرأسى.

ويفيد هذا الرسم فى تحديد أى تكرارات متجمعة تقل عن حد أدنى معين من الفئات غير الواردة أساساً بجدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد ، كما يفيد فى تحديد التكرارات المتجمعة التى تتراوح بين حدين للفئات وأيضاً هذان الحدان المفروض أنهما غير واردان مباشرة بجدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد.

ويتم وضع نقط التكرارات المتجمعة فوق الحدود العليا للفئات مباشرة ثم التوصيل بين هذه النقط بمنحنى ممهد سنجد أنه يأخذ الاتجاه التصاعدى لأعلى جهة اليمين من الرسم البيانى لأن التكرارات المتجمعة متزايدة.

مثال:

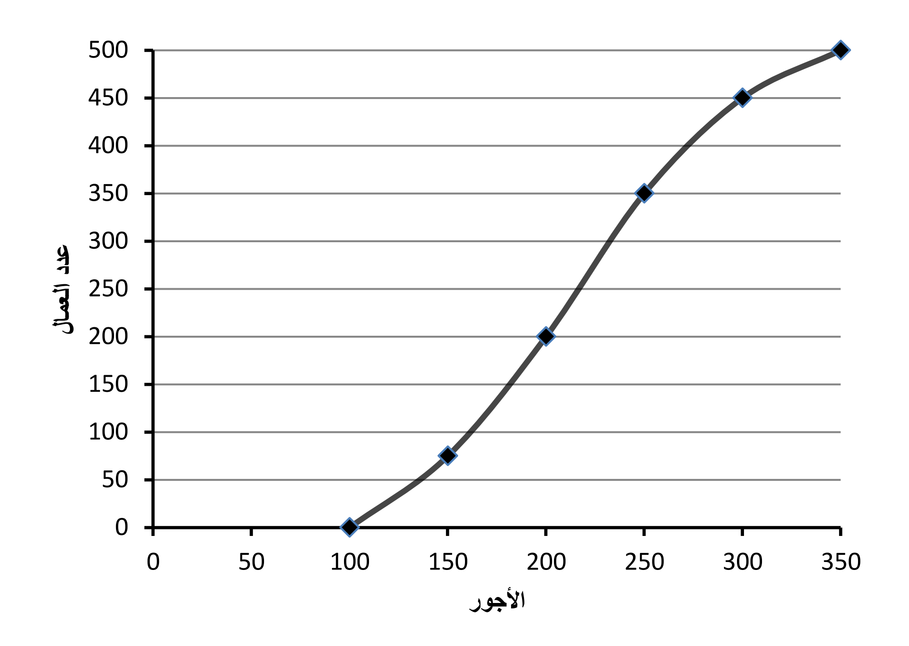
فئات الأجر بالجنيه	١٠٠-	١٥٠-	٢٠٠-	٢٥٠-	٣٠٠-٣٥٠
عدد العمال	٩	٣٥	١٠٠	٥٦	٣٢

ارسم المنحنى المتجمع الصاعد

الحل:

جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد

فئات الأجر	عدد العمال	فئات متجمعة صاعدة	تكرارات متجمعة صاعدة
١٠٠-	٧٥	أقل من ١٠٠	٠
١٥٠-	١٢٥	أقل من ١٥٠	٧٥
٢٠٠-	١٥٠	أقل من ٢٠٠	٢٠٠
٢٥٠-	١٠٠	أقل من ٢٥٠	٣٥٠
٣٠٠-٣٥٠	٥٠	أقل من ٣٠٠	٤٥٠
المجموع	٥٠٠	٣٥٠ فأقل	٥٠٠



<u>من الرسم السابق احسب ما يلى:</u>

١- عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ١٧٥ جنيه

نقيم عمود على المحور الأفقى عند القيمة ١٧٥ ومن نقطة تقاطعه مع المنحنى المتجمع الصاعد نرسم موازياً للمحور الأفقى فيتحدد عدد العمال على المحور الرأسى = ١٤٠ عامل تقريباً.

٢- حدد عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ١٧٥ جنيه ، ٢٧٥ جنيه ثم حدد نسبتهم.

بنفس الطريقة السابقة نقيم عمودين عند الأجرين ١٧٥ جنيه ، ٢٧٥ جنيه ومن نقط تقاطعهما مع المنحنى المتجمع الصاعد نرسم خطين موازيين للمحور الأفقى فيتحدد عدد العمال بالفرق بين القراءتين المحددتين على المحور الرأسى.

عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٢٧٥ جنيه = ٤٠٠ عامل تقريباً

عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ١٧٥ جنيه = ١٤٠ عامل تقريباً

∴ عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ١٧٥ جنيه ، ٢٧٥ جنيه = ٤٠٠ – ١٤٠ = ٢٦٠ عاملاً تقريباً

النسبة المئوية للعمال الذين تتراوح أجورهم بين ١٧٥ جنيه ، ٢٧٥ جنيه = $\frac{٢٦٠}{٥٠٠}$ × ١٠٠ = ٥٢ ٪

٣- حدد الأجر الذى يحصل على أقل منه ٥٠ ٪ من عدد العمال

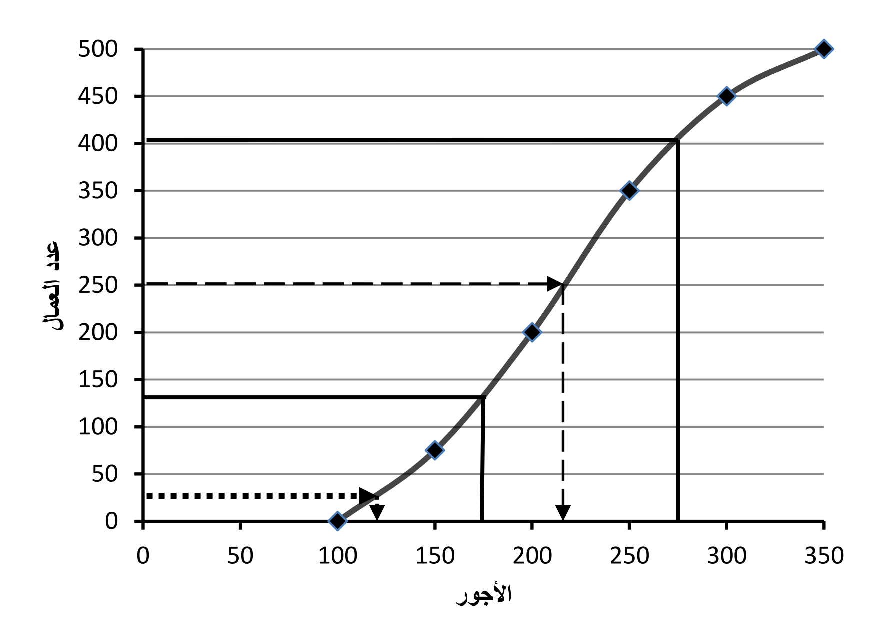
عدد العمال = ٥٠٠ × $\frac{٥٠}{١٠٠}$ = ٢٥٠ عامل نحدد هذا الرقم على المحور الرأسى الممثل للتكرارات المتجمعة ونرسم منه موازياً للمحور الأفقى ومن نقطة تقاطعه مع المنحنى المتجمع الصاعد نسقط عموداً على المحور الأفقى فيتحدد الحد الأعلى للأجر المطلوب وهو ٢١٥ جنيه تقريباً

٤- حدد الأجر الذى يحصل على أكثر منه ٩٥ ٪ من عدد العمال

وهذا يساوى تماماً الأجر الذى يحصل على أقل منه (١ – ٠,٩٥) = ٥٪ من عدد العمال

= ٥٠٠ × $\frac{٥}{١٠٠}$ = ٢٥ عامل

ويتم تحديد ٢٥ عاملاً على المحور الرأسى ونرسم موازى للمحور الأفقى ومن نقطة تقاطعه مع المنحنى المتجمع الصاعد نسقط عموداً على المحور الأفقى فيتحد الأجر المطلوب = ١١٥ جنيه تقريباً

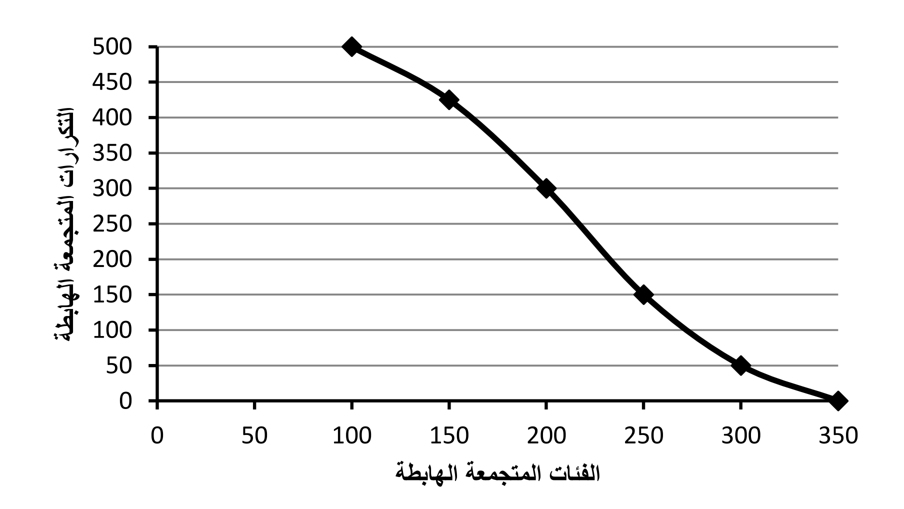


(٢) المنحنى المتجمع الهابط:

لرسم المنحنى المتجمع الهابط نقوم أولاً بإعداد جدول التوزيع التكرارى المتجمع الهابط وتمثل الحدود الدنيا للفئات على المحور الأفقى والتكرارات المتجمعة الهابطة على المحور الرأسى وذلك بوضع نقط فوق الحدود الدنيا للفئات وأمام التكرار المتجمع الهابط الخاص بها ويتم التوصيل بين هذه النقط بمنحنى ممهد نحصل على منحنى يتجه من أعلى اليسار هابط جهة اليمين وحتى نهاية الحدود الدنيا للفئات ، كما يتضح من حل المثال السابق كما يلى:

جدول توزيع تكرارى متجمع هابط

الفئات ف	التكرارات ك	فئات متجمعة هابطة	التكرارات المتجمعة الهابطة
١٠٠-	٧٥	١٠٠ فأكثر	٥٠٠
١٥٠-	١٢٥	١٥٠ فأكثر	٤٢٥
٢٠٠-	١٥٠	٢٠٠ فأكثر	٣٠٠
٢٥٠-	١٠٠	٢٥٠ فأكثر	١٥٠
٣٠٠-٣٥٠	٥٠	٣٠٠ فأكثر	٥٠
المجموع	٥٠٠	أكثر من ٣٥٠	٠



<u>من الرسم السابق احسب ما يلى:</u>

١- عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ١٢٥ جنيه

من الرسم = ٤٦٠ عامل تقريباً.

٢- حدد عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ١٢٥ جنيه ، ٢٢٥ جنيه ثم حدد نسبتهم.

عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ١٢٥ جنيه = ٤٦٠ عامل تقريباً

عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٢٢٥ جنيه = ٢٢٠ عامل تقريباً

∴ عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ١٢٥ جنيه ، ٢٢٥ جنيه = ٤٦٠ – ٢٢٠ = ٢٤٠ عاملاً تقريباً

النسبة المئوية للعمال الذين تتراوح أجورهم بين ١٢٥ جنيه ، ٢٢٥ جنيه = $\frac{٢٤٠}{٥٠٠}$ × ١٠٠ = ٤٨ ٪

٣- حدد الأجر الذى يحصل على أكثر منه ٢٠ ٪ من عدد العمال

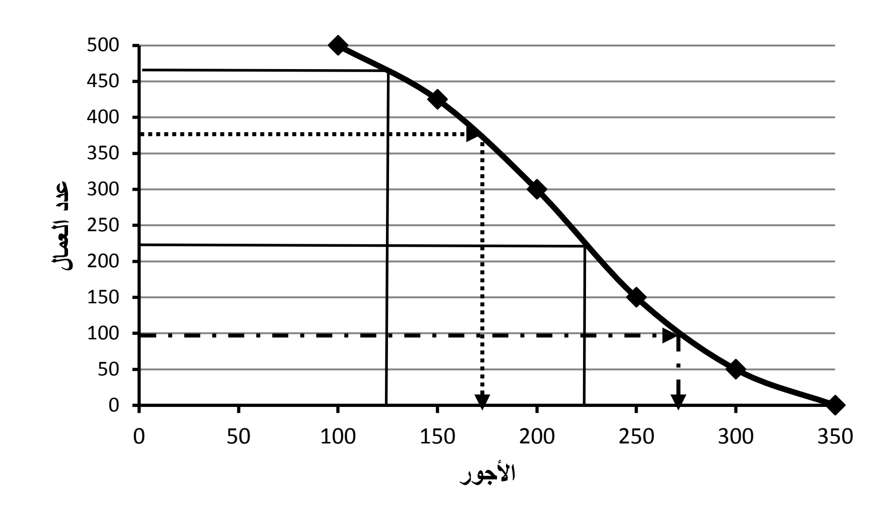
عدد العمال = ٥٠٠ × $\frac{٢٠}{١٠٠}$ = ١٠٠ عامل

الأجر المطلوب = ٢٦٥ جنيه تقريباً

٤- حدد الأجر الذى يحصل على أقل منه ١٢٥ من عدد العمال

الأجر الذى يحصل على أكثر منه (٥٠٠ – ١٢٥) = ٣٧٥ عامل

الأجر المطلوب = ١٧٠ جنيه تقريباً



500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
عدد العمال
0
50
100
150
200
250
300
350
الأجور

تمارين على الفصل الثالث

١. اعرض السلسلة الزمنية للجدول التالى فى رسم بيانى مناسب

السنة	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢
انتاج الأسمنت بالمليون جنيه	٦٥	١٣٥	١٢٠	١٥٠	١٨٥	٢٠٠	٢٦٠	٢٧٠	٣٠٠

٢. اعرض الجدول التالى فى رسم بيانى مناسب مظهراً الفروق بين الصادرات والواردات فى شكل فائض أو عجز

السنة	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣	٢٠١٤
الصادرات	١٧	٢٥	٣٥	٣٠	٥٥	٧٥	٩٠	١٢٠
الواردات	٢٥	٣٥	٥٥	٤٠	٦٠	٨٥	١٠٠	١٥٠

القيمة بالمليون جنيه

٣.

السنة / الغلة	الانتاج		
	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢
قطن	٥٦	٧٥	١٢٠
ذرة	٢٣	٣٥	٥٥
قمح	٤٥	٦٠	١٠٠
سكر	١٣	٢٥	٣٥
شعير	٦	١٢	٢٠

أ – اعرض الجدول السابق فى شكل أعمدة مناسبة

ب– اعرض الانتاج عام ٢٠١٢ فى شكل دائرة

٤. فيما يلى بيان بأعداد المؤهلات التالية:

المؤهل	٢٠٠٧		٢٠١٤	
	ذكور	إناث	ذكور	إناث
متوسط	٥٥٠	٣٤٠	٧٨٠	٦٥٠
عال	٨٤٠	٥٢٠	١٢٠٠	١١٠٠
ماجستير	١٢٠	٨٥	١٧٠	١٥٠
دكتوراه	٣٥	١٥	٦٥	٢٥

اعرض الجدول السابق فى رسم بيانى مناسب

٥. فيما يلى الإنتاج بالألف جنيه عام ٢٠١٣

نوع الانتاج	قطاع عام	قطاع خاص
صناعى	١١٢٥	٨٤٠
زراعى	٢٣٥٠	١٧٣٠
تجارى	٨٥٠	١٥٦٠
خدمى	٦٥٠	٢٤٠

اعرض الجدول السابق:

أ – فى شكل أعمدة مناسبة

ب– فى شكل دوائر

٦.

فئات الوزن	٦٠–	٦٥–	٧٠–	٧٥–	٨٠–	٨٠–٩٠
عدد اللاعبين	٢٠	٣٥	٥٥	٤٥	٣٥	١٠

أ – ارسم المدرج التكرارى واستنتج المضلع التكرارى منه

ب– ارسم المنحنى التكرارى

ج- ارسم المنحنى المتجمع الصاعد واستنتج منه نسبة عدد اللاعبين الذين تتراوح أوزانهم بين ٦٧ كيلو جرام ، ٧٧ كيلو جرام

د - ارسم المنحنى المتجمع الهابط واستنتج منه الوزن الذى يوجد أكثر منه ٢٠ ٪ من عدد اللاعبين

٧.

فئات الأجر	٨٠-	١٠٠-	١٣٠-	١٤٠-	١٧٥-	٢٠٠-٢٥٠
عدد الموظفين	١٠٠	٢٤٠	١٢٠	٣٥٠	١٧٥	١٥٠

أ - ارسم المدرج التكرارى واستنتج المنحنى التكرارى منه

ب-ارسم المنحنى المتجمع الصاعد واستنتج منه الأجر الذى يحصل على أقل منه ٣٠٪ من عدد الموظفين

ج- ارسم المنحنى المتجمع الهابط واستنتج منه نسبة عدد الموظفين الذين تتراوح أجورهم بين ١٢٠ جنيه ، ١٥٠ جنيه

الباب الثانى
مقاييس النزعة المركزية
(المتوسطات)

مقدمة:

تعرضنا فى الباب السابق لتبويب وعرض البيانات لوصف الظواهر المختلفة ، ولكن يؤخذ على التبويب والعرض البيانى بأن ليس له أساس علمى ثابت من ناحية عدد الفئات وأطوالها والطرق المختلفة للعرض البيانى حيث يتوقف ذلك بدرجة كبيرة على الباحث وأدواته والهدف من البحث والتحليل ، وقد دفع ذلك الإحصائيين إلى محاولة توصيف وتلخيص البيانات كمياً بأرقام لها دلالات إحصائية معينة ، كما تستخدم فى المقارنات المختلفة بين الظواهر ، ولا تختلف هذه الأرقام والدلالات بإختلاف الأشخاص الباحثين أو المحللين ، كما تهدف هذه الأرقام أو المقاييس وخاصة التى لها نزعة مركزية إلى تلخيص البيانات المتاحة فى رقم واحد مركزى يتوسط هذه الأرقام ويعبر عنها أو يمثلها خير تمثيل ، ولكن تختلف هذه المقاييس المركزية عن بعضها البعض فى قوة مدلولها ومدى ملاءمتها لنوعيات معينة من البيانات والجداول سنتعرض لها بالتفصيل فى هذا الباب من خلال دراسة المتوسطات التالية:

١. الوسط الحسابى Arithmetic Mean
٢. الوسط الهندسى Geometric Mean
٣. الوسط التوافقى Harmonic Mean
٤. الوسيط Median
٥. المنوال Mode

الفصل الأول
الوسط الحسابى
Arithmetic Mean

خصائص الوسط الحسابى:

١. سهل الحساب وهو أكثر المقاييس شيوعاً واستخداماً.
٢. يأخذ عند الحساب جميع مفردات العينة أو المجتمع موضوع الدراسة وبالتالى يتأثر بجميع القيم وخاصةً القيم المتطرفة ، وبالتالى لا ينصح باستخدامه فى حالة وجود هذه القيم وفى حالة التوزيعات الحادة أو شديدة الالتواء.
٣. يمكن حسابه دون معرفة تفاصيل القيم بل يكفى معرفة مجموعها فقط.
٤. يخضع للعمليات الجبرية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) بحيث يتأثر بها ولابد من مراعاة ذلك عند استخدام هذه العمليات فى التبسيط والحساب.
٥. لا يحتاج لتعديل أطوال الفئات فى حالة اختلافها.
٦. لايمكن حسابه بالرسم.
٧. لا يصلح إلا فى حالة الجداول التكرارية المقفلة ولا يصلح فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة.
٨. مجموع الانحرافات أو الفروق بين القيم الأصلية والوسط الحسابى يساوى صفر.
٩. يحقق شروط المقياس الإحصائى الجيد من حيث عدم التحيز والكفاءة والاتساق وانخفاض مستوى التباين.

١٠. مجموع مربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابى يقل عن مجموع مربعات إنحرافات القيم عن أى متوسط آخر (انخفاض مستوى التباين)

أولاً: البيانات غير المبوبة:

(١) الوسط الحسابى البسيط: Simple Arithmetic Mean

يمكن تعريف الوسط الحسابى بأنه مجموع القيم أو المشاهدات أو القراءات مقسوماً على عددها.

فإذا فرضنا أن لدينا المتغير س الذى يمكن أن يأخذ القيم التالية:

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... ، $س_ن$

وإذا رمزنا للوسط الحسابى لهذه القيم بالرمز $\overline{س}$ فإن:

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ر=ن} س_ر}{ن}$$

ويمكن كتابة الصيغة السابقة باختصار كما يلى:

$$\overline{س} = \frac{\text{مجـ}\,س}{ن}$$

مثال:

احسب الوسط الحسابى للقيم التالية:

١٠ ، ١٥ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٢٢

<u>الحل:</u>

$$\bar{س} = \frac{١٠+١٥+١٢+١٨+٢٨+٢٥+٣٠+٢٢}{٨} = \frac{١٦٠}{٨}$$

$$\therefore \bar{س} = ٢٠$$

<u>الطرق المختصرة للوسط الحسابى:</u>

<u>(أ) الجمع والطرح:</u>

يمكن الوصول للوسط الحسابى عن طريق إضافة أو طرح وسط فرضى يحدده الباحث وخاصة إذا كانت الأرقام كبيرة وإذا فرضنا أننا سنقوم بطرح وسط فرضى من جميع الأرقام ثم نقوم بحساب الوسط الحسابى للفروق أو الانحرافات بين القيم الأصلية والوسط الفرضى ثم نعود لإضافة الوسط الفرضى المستبعد على الناتج النهائى فنحصل على الوسط الحسابى الحقيقى للبيانات ، وليس هناك قاعدة ثابتة لاختيار الوسط الفرضى فقد يكون أكثر الأرقام تكراراً أو أكبر الأرقام أو أصغر رقم أو أى رقم متوسط موجود أو غير موجود فى البيانات فيتوقف ذلك على وجهة نظر الباحث والهدف من التبسيط.

<u>حل المثال السابق بفرض أننا أخذنا وسط فرضى أ = ٢٥ فإن:</u>

الانحرافات أو الفروق بين القيم الأصلية والوسط الفرضى هى:

−١٥ ، −١٠ ، −١٣ ، −٧ ، ٣ ، ٠ ، ٥ ، −٣

يكون متوسط الانحرافات السابقة $= \frac{-١٥-١٠-١٣-٧+٣+٠+٥-٣}{٨}$

$$= \frac{-٤٠}{٨} = -٥$$

∴ $\overline{س}$ =−٥ + ٢٥ = ٢٠ وهى نفس الإجابة السابقة

أى أنه يتم معالجة الناتج النهائى بالعملية العكسية تماماً لعملية التبسيط.

(ب) الضرب والقسمة:

يتاثر أيضاً الوسط الحسابى بعمليات الضرب والقسمة ، فإذا ضربنا جميع المشاهدات أو القيم فى رقم ثابت لابد أن نقسم الناتج النهائى على نفس الرقم للوصول لنفس الوسط الحسابى ، وكذلك لو قسمنا جميع المشاهدات أو القيم على رقم ثابت أو عامل مشترك لابد أن نضرب الناتج النهائى فى نفس الرقم للوصول لنفس الوسط الحسابى (أى نعالج الناتج النهائى دائماً بالعملية العكسية تماماً لعملية التبسيط).

(٢) الوسط الحسابى المرجح: Weighted Arithmetic Mean

يعتبر الوسط الحسابى البسيط دقيقاً إذا كانت مفردات العينة أو المجتمع لها نفس الأهمية النسبية أو لها نفس الوزن فى التوزيع ، ولكن إذا اختلفت الأهمية النسبية أو الأوزان لمفردات القيم لابد أن تؤخذ هذه الأوزان فى الاعتبار عند حساب الوسط الحسابى ويطلق عليه حينئذ الوسط الحسابى المرجح ويمكن تعريفه بأنه متوسط مجموع القيم أو المشاهدات مرجحاً بأوزانها.

فإذا فرضنا أن لدينا المتغير العشوائى س الذى يمكن أن يأخذ أحدالقيم أو المشاهدات التالية:

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، .... ، $س_{ن}$

وأن أوزان القيم السابقة هى على الترتيب:

$و_١$ ، $و_٢$ ، $و_٣$ ، .... ، $و_ن$ فإن:

$$\overline{س} = \frac{س_١ و_١ + س_٢ و_٢ + ... + س_ن و_ن}{و_١ + و_٢ + ... + و_ن}$$

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ر=ن} س_ر و_ر}{\sum_{ر=١}^{ر=ن} و_ر}$$

ويمكن كتابة الصيغة السابقة بإختصار كما يلى:

$$\overline{س} = \frac{\sum س و}{\sum و}$$

<u>مثال:</u>

فيما يلى بيان بأسعار أنواع من السلع بالجنيه المصرى والكميات المقابلة لكل نوع بالكيلو:

الأسعار للكيلو بالجنيه المصرى	٢٠	٣٠	٥٠	٨٠
الكميات المعروضة بالكيلو لكل نوع	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠

المطلوب: احسب الوسط الحسابى البسيط للأسعار والوسط الحسابى المرجح للأسعار

<u>الحل:</u>

$$\text{الوسط الحسابى البسيط للأسعار} = \frac{٢٠+٣٠+٥٠+٨٠}{٤}$$

$$\bar{س} = \frac{١٨٠}{٤} \qquad \therefore \bar{س} = ٤٥$$

$$\text{الوسط الحسابى المرجح للأسعار} = \frac{٢٠\times٥٠+٣٠\times٤٠+٥٠\times٣٠+٨٠\times٢٠}{٥٠+٤٠+٣٠+٢٠}$$

$$\bar{س} = \frac{٥٣٠٠}{١٤٠}$$

$$\therefore \bar{س} = ٣٧,٨٥٧$$

ويلاحظ انخفاض الوسط الحسابى المرجح عن الوسط الحسابى البسيط لأن الوزن المعطى للأرقام الكبيرة صغير أى أن تأثير الأرقام الكبيرة واضح على الوسط الحسابى البسيط ولكن مع أخذ أهميتها النسبية المنخفضة انخفض الوسط الحسابى المرجح وهو الأقرب للمنطق وأكثر دقة.

<u>ثانياً: البيانات المبوبة فى جداول تكرارية:</u>

<u>(١) الطريقة المطولة:</u>

يمكن تعريف الوسط الحسابى من جداول التوزيعات التكرارية بأنه الوسط الحسابى المرجح أو الموزون بالتكرارات ، وعند حسابه نلجأ لبعض التقريب حيث أننا نفترض أن جميع التكرارات داخل الفئة موزعة بإنتظام على مدى الفئة ولذلك نفترض أن جميع التكرارات تأخذ قيمة وحيدة داخل الفئة هى مركز الفئة ، وهذا التقريب يعطى نتائج دقيقة كلما كانت التكرارات الفعلية موزعة بإنتظام على مدار الفئة وليست مركزة فى

بدايتها أو فى نهايتها أو فى أى نقطة أخرى داخل الفئة ، وبالتالى يعتبر الوسط الحسابى هو متوسط مراكز الفئات المرجحة بالتكرارات ، وباستخدام القانون التالى الذى يحقق هذا التعريف:

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ر=ن} ك_ر \, س_ر}{\sum_{ر=1}^{ر=ن} ك_ر}$$

ويمكن إعادة كتابته بالصيغة المختصرة التالية:

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ} ك س}{\text{مجـ} ك}$$

<u>(٢) الطريقة المختصرة:</u>

وكما تعرضنا فى البيانات غير المبوبة عن إمكانية تبسيط قيم مراكز الفئات بإختصار أو تحديد وسط فرضى (أ) سواء كان أحد مراكز الفئات أصغرها أو أكبرها أو أوسطها أو مركز الفئة أمام أكبر تكرار أو أى رقم آخر يفترضه الباحث ، وكما سبق أن ذكرنا فإن الوسط الحسابى يتأثر بالوسط الفرضى طرحاً أو إضافة وبالتالى لابد من معالجة الناتج النهائى بالعملية الحسابية العكسية لهذا الوسط الفرضى كما يلى:

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ} ك ح}{\text{مجـ} ك} + أ$$

حيث ح تمثل الانحرافات بين مراكز الفئات والوسط الفرضى أى أن:

$$ح_ر = س_ر - أ$$

(٣) الطريقة المختصرة المختزلة:

وكما تعرضنا أيضاً فى البيانات غير المبوبة بأن الوسط الحسابى يتأثر بأى عامل اختزال بمعنى أن قسمة مراكز الفئات أو الانحرافات على عامل اختزال مشترك سواء كان هذا العامل هو طول الفئة فى الفئات المتساوية أو أى عامل مشترك آخر فى الفئات غير المتساوية ولنرمز لعامل الاختزال بالرمز (ط) ولابد من معالجة النتيجة النهائية بالعملية العكسية لمعامل الاختزال كما يلى:

$$\bar{س} = ط \times \frac{مجـ ك ح'}{مجـ ك} + أ$$

حيث $ح' = ح \div ط$

مثال (١):

احسب الوسط الحسابى للتوزيع التالى:

الفئات	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-٣٥
التكرارات	١٠	١٥	٣٥	٢٥	١٥

الحل:

١- الطريقة المطولة:

الفئات ف	التكرارات ك	مراكز الفئات س	التكرارات × مراكز الفئات ك × س
١٠-	١٠	١٢,٥	١٢٥
١٥-	١٥	١٧,٥	٢٦٢,٥
٢٠-	٣٥	٢٢,٥	٧٨٧,٥
٢٥-	٢٥	٢٧,٥	٦٨٧,٥
٣٠-٣٥	١٥	٣٢,٥	٤٨٧,٥
	١٠٠ مجـ ك		٢٣٥٠ مجـ ك س

$$\overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٢٣٥٠}{١٠٠}$$

$\therefore \overline{\text{س}} = ٢٣,٥$

٢- الطريقة المختصرة:

الفئات ف	التكرارات ك	مراكز الفئات س	الانحرافات عن وسط فرضى ح= س - أ	التكرارات × مراكز الفئات ك × ح
١٠-	١٠	١٢,٥	١٠-	١٠٠-
١٥-	١٥	١٧,٥	٥-	٧٥-
٢٠-	٣٥	٢٢,٥	صفر	صفر
٢٥-	٢٥	٢٧,٥	٥	١٢٥
٣٠-٣٥	١٥	٣٢,٥	١٠	١٥٠
	١٠٠ مجـ ك			١٠٠ مجـ ك ح

بفرض أن الوسط الفرضى أ = ٢٢,٥ (مركز الفئة الوسطى)

$$\overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك ح}}{\text{مجـ ك}} + \text{أ} = \frac{١٠٠}{١٠٠} + ٢٢,٥ = ١ + ٢٢,٥$$

$\therefore \overline{\text{س}} = ٢٣,٥$

٣- الطريقة المختصرة المختزلة:

ف	ك	س	ح	الانحرافات المختزلة $\acute{ح}$ = ح ÷ ط	ك × $\acute{ح}$
١٠-	١٠	١٢,٥	-١٠	-٢	-٢٠
١٥-	١٥	١٧,٥	-٥	-١	-١٥
٢٠-	٣٥	٢٢,٥	صفر	صفر	صفر
٢٥-	٢٥	٢٧,٥	٥	١	٢٥
٣٠-٣٥	١٥	٣٢,٥	١٠	٢	٣٠
	١٠٠ مجـــ ك				٢٠ مجـــ ك $\acute{ح}$

حيث أ = ٢٢,٥ ، ط = ٥

$$\bar{س} = ط \times \frac{مجـــ ك \acute{ح}}{مجـــ ك} + أ$$

$$= ٥ \times \frac{٢٠}{١٠٠} + ٢٢,٥ = ١ + ٣٣,٥ = ٢٣,٥$$

مثال (٢):

المطلوب حساب متوسط الأجور للتوزيع التالى:

فئات الأجر	١٠٠-	١٢٠-	١٥٠-	٢٠٠-	٣٠٠-٥٠٠
التكرارات	١٠٠	١٥٠	٨٠	٥٠	٢٠

الحل:

١- الطريقة المطولة:

الفئات ف	التكرارات ك	مراكز الفئات س	التكرارات × مراكز الفئات ك × س
١٠٠-	١٠٠	١١٠	١١٠٠٠
١٢٠-	١٥٠	١٣٥	٢٠٢٥٠
١٥٠-	٨٠	١٧٥	١٤٠٠٠
٢٠٠-	٥٠	٢٥٠	١٢٥٠٠
٣٠٠-٥٠٠	٢٠	٤٠٠	٨٠٠٠
	٤٠٠ مجـ ك		٦٥٧٥٠ مجـ ك س

$$\bar{س} = \frac{مجـ ك س}{مجـ ك} = \frac{٦٥٧٥٠}{٤٠٠} = ١٦٤,٣٧٥ \text{ جنيه}$$

٢- الطريقة المختصرة:

إذا أخذنا وسط فرضى من مراكز الفئات وليكن الرقم ١٧٥

الفئات ف	التكرارات ك	مراكز الفئات س	الانحرافات عن وسط فرضى ح= س - أ	التكرارات × مراكز الفئات ك × ح
١٠٠-	١٠٠	١١٠	٦٥-	٦٥٠٠-
١٢٠-	١٥٠	١٣٥	٤٠-	٦٠٠٠-
١٥٠-	٨٠	١٧٥	صفر	صفر
٢٠٠-	٥٠	٢٥٠	٧٥	٣٧٥٠
٣٠٠-٥٠٠	٢٠	٤٠٠	٢٢٥	٤٥٠٠
	٤٠٠ مجـ ك			٤٢٥٠- مجـ ك ح

$$\overline{س} = \frac{مجـ ك ح}{مجـ ك} + أ = \frac{-٤٢٥٠}{٤٠٠} + ١٧٥$$

= -١٠,٦٢٥ + ١٧٥ = ١٦٤,٣٧٥ جنيه

٣- الطريقة المختصرة المختزلة:

ف	ك	س	ح	الانحرافات المختزلة $\acute{ح}$ = ح ÷ ط	ك × $\acute{ح}$
١٠٠-	١٠٠	١١٠	-٦٥	-١٣	-١٣٠٠
١٢٠-	١٥٠	١٣٥	-٤٠	-٨	-١٢٠٠
١٥٠-	٨٠	١٧٥	صفر	صفر	صفر
٢٠٠-	٥٠	٢٥٠	٧٥	١٥	٧٥٠
٣٠٠-٥٠٠	٢٠	٤٠٠	٢٢٥	٤٥	٩٠٠
	٤٠٠ مجـ ك				-٨٥٠ مجـ ك $\acute{ح}$

ملاحظة: ط هنا ليست طول الفئة ولكنها عامل مشترك قيمته = ٥ حيث أن كل الأرقام فى العمود ح تقبل القسمة على ٥

$$\overline{س} = ط \times \frac{مجـ ك \acute{ح}}{مجـ ك} + أ$$

$$= ٥ \times \frac{-٨٥٠}{٤٠٠} + ١٧٥$$

= -١٠,٦٢٥ + ١٧٥

∴ $\overline{س}$ = ١٦٤,٣٧٥ جنيه

الفصل الثانى
الوسط الهندسى
Geometric Mean

خصائص الوسط الهندسى:

١. يعتبر الهندسى من أدق مقاييس النزعة المركزية وخاصة إذا كانت قيم المتغير (س) تأخذ شكل نسب أو معدلات حيث يعتبر أقرب للقيم الحقيقية التى يأخذها المتغير (س) من أى متوسط آخر وبالتالى فهو مناسب جداً عند حساب الأرقام القياسية عن باقى المتوسطات الأخرى.

٢. يعطى قيمة وحيدة مثل الوسط الحسابى ويتأثر بجميع قيم المفردات التى يأخذها المتغير (س) ولكن تأثيره بالقيم المتطرفة أقل من الوسط الحسابى.

٣. لايحتاج لتعديل التكرارات فى حالة الفئات غير المتساوية.

٤. لايمكن حسابه بالرسم.

٥. معقد نسبياً فى طريقة حسابه لأنه يعتمد على اللوغاريتمات.

٦. يعتبر الوسط الهندسى أصغر دائماً من الوسط الحسابى.

٧. لايمكن حساب الوسط الهندسى إذا كان أحد قيم المتغير (س) يساوى صفراً حيث ينعدم أو يتلاشى الوسط الهندسى بغض النظر عن القيم الأخرى.

٨. لا يمكن حساب الوسط الهندسى للمتغير العشوائى (س) إذا كان أحد قيم المتغير (س) قيمة سالبة أو عدد القيم السالبة للمتغير (س) عدداً فردياً حيث يصبح الوسط الهندسى مشتملاً على جذر تخيلى.

٩. لا يمكن حساب الوسط الهندسى فى الجداول التكرارية المفتوحة من أحد طرفيها أو من الطرفين.

أولاً: البيانات غير المبوبة: (الوسط الهندسى البسيط)

يعرف الوسط الهندسى البسيط بأنه الجذر النونى لحاصل ضرب ن من القيم المختلفة التى يأخذها المتغير (س)

وإذا رمزنا للوسط الهندسى بالرمز هـ نجد أن:

$$\text{هـ} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}_{١} \times \text{س}_{٢} \times \text{س}_{٣} \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times \text{س}_{\text{ن}}}$$

ولحساب الوسط الهندسى هـ نلجأ إلى اللوغاريتمات المعتادة للتبسيط كما يلى:

$$\text{لو هـ} = \frac{١}{\text{ن}} \left\{ \text{لو س}_{١} + \text{لو س}_{٢} + \text{لو س}_{٣} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{لو س}_{\text{ن}} \right\}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{١}{\text{ن}} \times \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{لو س}_{\text{ر}}$$

ويتم حساب اللوغاريتمات السابقة من جداول اللوغاريتمات أو بإستخدام الآلة الحاسبة وذلك بتسجيل الرقم على الآلة ثم الضغط على الزر LOG

ولحساب قيمة الوسط الهندسى (هـ) لابد من إلغاء اللوغاريتم ويتم ذلك بالكشف عن الناتج النهائى فى جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات أو بإستخدام الآلة الحاسبة وذلك بتسجيل الناتج النهائى على الآلة ثم الضغط على الزر 10^X ويتضح ذلك من المثال التالى:

مثال:

قارن بين الوسط الحسابى البسيط والوسط الهندسى البسيط للقيم التالية:

٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٢٨ ، ٢٢

الحل:

١- الوسط الحسابى:

$$\bar{س} = \frac{٢٠+٢٥+٣٠+٢٨+٢٢}{٥}$$

$$= \frac{١٢٥}{٥}$$

$$\therefore \bar{س} = ٢٥$$

٢- الوسط الهندسى:

$$هـ = \sqrt[٥]{٢٠ \times ٢٥ \times ٣٠ \times ٢٨ \times ٢٢}$$

$$لو\ هـ = \frac{١}{٥}\left\{لو\ ٢٠ + لو\ ٢٥ + لو\ ٣٠ + لو\ ٢٨ + لو\ ٢٢\right\}$$

$$لو\ هـ = \frac{١}{٥}\left\{١,٣٠١٠٣ + ١,٣٩٧٩٤ + ١,٤٧٧١٢ + ١,٤٤٧١٦ + ١,٣٤٢٤٢\right\}$$

$$= \frac{١}{٥} \times ٦,٩٦٥٦٧$$

∴ لو هـ = ١,٣٩٣١٣ ثم بتسجيل هذا الرقم على الآلة الحاسبة والضغط على الزر $\boxed{10^X}$

∴ هـ = ٢٤,٧٢٥

∴ هـ < $\overline{س}$

ثانياً: البيانات المبوبة: (الوسط الهندسى المرجح)

عبارة عن الوسط الهندسى لمراكز الفئات مرجحاً بالتكرارات

$$هـ = \sqrt[مجـ ك]{س_{١}^{ك_{١}} \times س_{٢}^{ك_{٢}} \times س_{٣}^{ك_{٣}} \times \ldots\ldots\ldots \times س_{ن}^{ك_{ن}}}$$

وبتبسيط العلاقة السابقة وحسابها باللوغاريتمات نجد أن:

$$لو هـ = \frac{١}{مجـ ك}\left\{ك_{١} \times لو س_{١} + ك_{٢} \times لو س_{٢} + ك_{٣} \times لو س_{٣} + \ldots + ك_{ن} \times لو س_{ن}\right\}$$

$$= \frac{\sum_{ر=١}^{ر=ن} ك_{ر} لو س_{ر}}{مجـ ك}$$

ويمكن كتابتها بإختصار كما يلى:

$$لو هـ = \frac{مجـ ك لو س}{مجـ ك}$$

مثال:

احسب الوسط الهندسى للتوزيع التالى:

فئات	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-٧٠
تكرارات	١٠٠	١٥٠	٣٥٠	١٢٠	٨٠

الحل:

ف	ك	س	لو س	ك × لو س
٢٠–	١٠٠	٢٥	١,٣٩٧٩٤	١٣٩,٧٩٤
٣٠–	١٥٠	٣٥	١,٥٤٤٠٧	٢٣١,٦١١
٤٠–	٣٥٠	٤٥	١,٦٥٣٢١	٥٧٨,٦٢٤
٥٠–	١٢٠	٥٥	١,٧٤٠٣٦	٢٠٨,٨٤٣
٦٠–٧٠	٨٠	٦٥	١,٨١٢٩١	١٤٥,٠٣٣
	٨٠٠ مجــ ك			١٣٠٣,٩٠٥ مجــ ك لو س

$$\text{لو هـ} = \frac{\text{مجــ ك لو س}}{\text{مجــ ك}}$$

$$= \frac{١٣٠٣,٩٠٥}{٨٠٠} = ١,٦٢٩٨٨$$

وبتسجيل هذا الرقم على الآلة الحاسبة والضغط على الزر $\boxed{10^{X}}$

∴ هـ = ٤٢,٦٤٦

وإذا قمنا بحساب الوسط الحسابى للتوزيع السابق نجد أن $\overline{\text{س}}$ = ٤٤,١٢٥

أى أن هـ < $\overline{\text{س}}$ دائماً.

الفصل الثالث
الوسط التوافقى
Harmonic Mean

خصائص الوسط التوافقى:

١. حسابه معقد نسبياً.
٢. يستخدم فى حالات خاصة عندما يكون المتغير العشوائى (س) مرتبط بمعدلات أو وحدات زمنية وعموماً إذا كان المتغير العشوائى (س) على شكل نسب أو معدلات عندئذ يعتبر الوسط التوافقى أنسب وأدق المتوسطات.
٣. لا يمكن حسابه بالرسم.
٤. لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة من أحد طرفيها أو من الطرفين.
٥. يعطى قيمة وحيدة مثل الوسط الحسابى والوسط الهندسى ويتأثر بجميع قيم المفردات التى يأخذها المتغير العشوائى (س).
٦. لا يحتاج لتعديل التكرارات فى حالة الفئات غير المتساوية مثل الوسط الحسابى والوسط الهندسى.
٧. قيمته أصغر دائماً من قيمة الوسط الهندسى وبما أن قيمة الوسط الهندسى أصغر دائماً من قيمة الوسط الحسابى فإنه يمكن ترتيب المتوسطات الثلاث ترتيباً تنازلياً كما يلى:

$\overline{س} > هـ > ق$

بفرض أننا رمزنا لقيمة الوسط التوافقى بالرمز (ق)

أولاً: البيانات غير المبوبة:

يعرف الوسط التوافقى بأنه مقلوب الوسط الحسابى لمقلوبات القيم أو المشاهدات.

فإذا كان المتغير العشوائى (س) يمكن أن يأخذ أحد القيم التالية:

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... ، $س_ن$

فإن مقلوبات القيم السابقة هى:

$$\frac{١}{س_١} ، \frac{١}{س_٢} ، \frac{١}{س_٣} ، .... ، \frac{١}{س_ن}$$

ويكون مقلوب الوسط الحسابى لمقلوبات القيم السابقة هو:

$$ق = \frac{ن}{\frac{١}{س_١} + \frac{١}{س_٢} + \frac{١}{س_٣} + \cdots + \frac{١}{س_ن}}$$

$$ق = \frac{ن}{\sum_{ر=١}^{ر=ن} \frac{١}{س_ر}}$$

ويمكن كتابة هذه الصيغة بإختصار كما يلى:

$$ق = \frac{ن}{\sum \frac{١}{س}}$$

مثال:

احسب الوسط التوافقى للقيم التالية:

٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٢٨ ، ٢٢

الحل:

$$\text{ق} = \frac{5}{\frac{1}{20}+\frac{1}{25}+\frac{1}{30}+\frac{1}{28}+\frac{1}{22}}$$

$$= \frac{5}{0.05 + 0.04 + 0.0333 + 0.0357 + 0.04545} = \frac{5}{0.30448}$$

∴ ق = ٢٤,٤٥

وقد سبق أن حسبنا الوسط الحسابى والوسط الهندسى لهذا المثال وكانت نتائجهما كما يلى:

$\bar{\text{س}}$ = ٢٥ ، هـ = ٢٤,٧٣

يتضح من هذه النتائج أن الوسط التوافقى هو أصغر المتوسطات الثلاث

$\bar{\text{س}}$ = ٢٥ > هـ = ٢٤,٧٣ > ق = ٢٤,٤٥

ثانياً: البيانات المبوبة:

الوسط التوافقى هو مقلوب الوسط الحسابى لمقلوبات مراكز الفئات مرجحة بالتكرارات حيث:

$$\text{ق} = \frac{\text{مجـ ك}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \frac{\text{ك}_{\text{ر}}}{\text{س}_{\text{ر}}}}$$

ويمكن كتابة الصيغة السابقة بإختصار كما يلى:

$$ق = \frac{مجـ ك}{مجـ \frac{ك}{س}}$$

مثال:

احسب الوسط التوافقى للتوزيع التالى:

فئات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-٣٠
تكرارات	١٠	٢٥	٣٥	٢٠	١٠

الحل:

ف	ك	س	ك ÷ س
٥-	١٠	٧,٥	١,٣٣٣٣
١٠-	٢٥	١٢,٥	٢
١٥-	٣٥	١٧,٥	٢
٢٠-	٢٠	٢٢,٥	٠,٨٨٨٨
٢٥-٣٠	١٠	٢٧,٥	٠,٣٦٣٦
	١٠٠ مجـ ك		٦,٥٨٥٧ $مجـ \frac{ك}{س}$

$$ق = \frac{مجـ ك}{مجـ \frac{ك}{س}}$$

$$= \frac{١٠٠}{٦,٥٨٥٧} = ١٥,١٨$$

وإذا قمنا بحساب الوسط الحسابى للتوزيع السابق نجد أنه : $\bar{س}$ = ١٧,٢٥

وإذا قمنا بحساب الوسط الهندسى للتوزيع السابق نجد أنه : هـ = ١٦,٢٦

أى أن $\bar{س}$ > هـ > ق

الفصل الرابع
الوسيط
Median

خصائص الوسيط:

١. سهل الحساب.

٢. لا يتأثر بالقيم المتطرفة لذلك فهو ممثل جيد للتوزيعات التى تحتوى على مثل هذه القيم لأن الوسيط لا يأخذ فى حسابه قيم المتغير كلها ولكنه يأخذ القيمة الوسطى فقط (الموجودة فى منتصف البيانات).

٣. يصلح الوسيط فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة من البداية أو من النهاية أو من الطرفين لأنه كما سبق أن ذكرنا يتأثر بالقيمة الوسطى فقط.

٤. لا يحتاج لتعديل التكرارات فى حالة الجداول التكرارية ذات الفئات غير المتساوية.

٥. يمكن حسابه بالرسم والحساب.

٦. قيمته تقع محصورة دائماً بين الوسط الحسابى والمنوال.

٧. لا يعبر أو يمثل جميع القيم المختلفة للمتغير (س) تمثيلاً دقيقاً وخاصةً إذا كانت (ن) كبيرة الحجم لأن الوسيط كما سبق أن ذكرنا يتأثر بالقيمة الوسطى فقط.

٨. مجموع الانحرافات المطلقة للقيم المختلفة عن الوسيط أصغر ما يمكن بالمقارنة بمجموع الانحرافات المطلقة عن أى متوسط آخر غير الوسيط.

أولاً: البيانات غير المبوبة:

يمكن تعريف الوسيط بأنه القيمة التى تقسم مجموعة القيم أو المشاهدات إلى نصفين متساويين من ناحية العدد فقط وذلك بعد ترتيب البيانات ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازلياً ، أى أن الوسيط هو المفردة أو القيمة الوسطى من جميع القيم التى يمكن أن يأخذها المتغير العشوائى (س).

خطوات حساب الوسيط:

١. ترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازلياً.
٢. نحدد ترتيب الوسيط حيث:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{ن}+١}{٢}$$

٣. نحدد قيمة الوسيط بالعد حسب الترتيب السابق ولنرمز لقيمة الوسيط بالرمز ($ر_٢$)

مثال (١):

استخرج الوسيط للقيم التالية:

١٥ ، ١٨ ، ١٢ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٢٢

الحل:

أ – ترتيب القراءات ترتيباً تصاعدياً:

١ ٢ ٣ ٤ ٥

١٠ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، [٢٠] ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٠

ب- ترتيب الوسيط = $\frac{ن+١}{٢}$

$$= \frac{٩+١}{٢} = ٥$$

ج- قيمة الوسيط هو القراءة الخامسة:

∴ $ر_٢$ = ٢٠

مثال (٢):

استخرج الوسيط للقيم التالية:

٤ ، ١٠ ، ٨ ، ١٤ ، ١٧ ، ٢٠ ، ١٢ ، ٢٤

الحل:

أ - ترتيب القراءات ترتيباً تنازلياً:

١ ٢ ٣ ٤ ٥

٢٤ ، ٢٠ ، ١٧ ، ١٤ ، ١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ٤

ب- ترتيب الوسيط = $\frac{ن+١}{٢}$ = $\frac{٨+١}{٢}$ = ٤,٥

ج- قيمة الوسيط تقع بين القراءتين الرابعة والخامسة أى بين القيمتين ١٤ ، ١٢ ويتم حساب الوسيط على أساس الوسط الحسابى البسيط للقيمتين السابقتين:

∴ $ر_٢$ = $\frac{١٤+١٢}{٢}$ = ١٣

ثانياً: البيانات المبوبة:

(١) الوسيط بالحساب

الخطوات:

١. نكون جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط.

٢. نحدد ترتيب الوسيط حيث:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢}$$

٣. نحدد التكراران المتجمعان اللذان يُحصر بينهما ترتيب الوسيط.

٤. نحدد الفئة الوسيطية المقابلة للتكراران المتجمعان السابقان.

٥. نحدد قيمة الوسيط داخل الفئة الوسيطية بالنسبة والتناسب وذلك بفرض أن التكرارات المتجمعة موزعة بانتظام داخل الفئات وبالتالى عن طريق الاستكمال الخطى يمكن استنتاج قيمة الوسيط باستخدام القوانين التالية.

باستخدام الجدول المتجمع الصاعد:

$$\text{قيم الوسيط } (ر_٢) = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \text{طول الفئة الوسيطية} \times \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيطية}}{\text{تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية} - \text{تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيطية}}$$

باستخدام الجدول المتجمع الهابط:

$$\text{قيم الوسيط } (ر_٢) = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \text{طول الفئة الوسيطية} \times \frac{\text{تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيطية} - \text{ترتيب الوسيط}}{\text{تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيطية} - \text{تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية}}$$

ملاحظة:

يمكن الوصول لقيمة الوسيط ($ر_٢$) على أساس الحد الأعلى للفئة الوسيطية كما يلى:

باستخدام الجدول المتجمع الصاعد:

$$\text{قيم الوسيط } (ر_٢) = \text{الحد الأعلى للفئة الوسيطية} - \text{طول الفئة الوسيطية} \times \frac{\text{تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية} - \text{ترتيب الوسيط}}{\text{تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية} - \text{تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيطية}}$$

باستخدام الجدول المتجمع الهابط:

$$\text{قيم الوسيط } (ر_٢) = \text{الحد الأعلى للفئة الوسيطية} - \text{طول الفئة الوسيطية} \times \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية}}{\text{تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيطية} - \text{تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية}}$$

مثال (١):

استخرج الوسيط بالحساب للتوزيع التالى:

الفئات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-٦٠
التكرارات	٥٠	٨٠	٤٠	٢٠	١٠

الحل الأول: عن طريق جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد:

الفئات	التكرارات	الفئات المتجمعة الصاعدة	التكرارات المتجمعة الصاعدة	
١٠-	٥٠	أقل من ١٠	صفر	
٢٠-	٨٠	أقل من ٢٠	٥٠	تكرار الحد الأدنى
		$ر_٢$ ←	١٠٠	ترتيب الوسيط
٣٠-	٤٠	أقل من ٣٠	١٣٠	تكرار الحد الأعلى
٤٠-	٢٠	أقل من ٤٠	١٧٠	
٥٠-٦٠	١٠	أقل من ٥٠	١٩٠	
	٢٠٠	٦٠ فأقل	٢٠٠	

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٢٠٠}{٢} = ١٠٠$$

$$ر_٢ = ٢٠ + ١٠ \times \frac{١٠٠-٥٠}{١٣٠-٥٠}$$

$$= ٢٠ + ١٠ \times \frac{٥٠}{٨٠}$$

$$\therefore ر_٢ = ٢٦,٢٥$$

كما يمكن حساب الوسيط باستخدام الحد الأعلى للفئة الوسيطية كما يلى:

$$ر_٢ = ٣٠ - ١٠ \times \frac{١٣٠-١٠٠}{١٣٠-٥٠}$$

$$= ٣٠ - ١٠ \times \frac{٣٠}{٨٠}$$

$$\therefore ر_٢ = ٢٦,٢٥$$

الحل الثانى: عن طريق جدول التوزيع التكرارى المتجمع الهابط:

الفئات	التكرارات	الفئات المتجمعة الهابطة	التكرارات المتجمعة الهابطة	
١٠-	٥٠	١٠ فأكثر	٢٠٠	
٢٠-	٨٠	٢٠ فأكثر	١٥٠	تكرار الحد الأدنى
		$ر_٢$ ←	١٠٠	ترتيب الوسيط
٣٠-	٤٠	٣٠ فأكثر	٧٠	تكرار الحد الأعلى
٤٠-	٢٠	٤٠ فأكثر	٣٠	
٥٠-٦٠	١٠	٥٠ فأكثر	١٠	
	٢٠٠	أكثر من ٦٠	صفر	

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٢٠٠}{٢} = ١٠٠$$

$$ر_٢ = ٢٠ + ١٠ \times \frac{١٥٠-١٠٠}{١٥٠-٧٠}$$

$$= ٢٠ + ١٠ \times \frac{٥٠}{٨٠}$$

$$\therefore ر_٢ = ٢٦,٢٥$$

كما يمكن حساب الوسيط باستخدام الحد الأعلى للفئة الوسيطية كما يلى:

$$ر_٢ = ٣٠ - ١٠ \times \frac{١٠٠-٧٠}{١٥٠-٧٠}$$

$$= ٣٠ - ١٠ \times \frac{٣٠}{٨٠}$$

$$\therefore ر_٢ = ٢٦,٢٥$$

<u>مثال (٢):</u>

احسب الوسيط بالحساب للتوزيع التالى:

فئات	أقل من ٢٠	٢٠-	٣٠-	٥٠-	٨٠ فأكثر
تكرارات	١٥	٢٥	٣٠	٢٠	١٠

<u>الحل الأول: عن طريق جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد:</u>

الفئات	التكرارات	الفئات المتجمعة الصاعدة	التكرارات المتجمعة الصاعدة
أقل من ٢٠	١٥	أقل من الحد الأدنى	صفر
٢٠-	٢٥	أقل من ٢٠	١٥
		أقل من ٣٠	٤٠
٣٠-	٣٠	$ر_٢$ ←	٥٠
٥٠-	٢٠	أقل من ٥٠	٧٠
٨٠ فأكثر	١٠	أقل من ٨٠	٩٠
	١٠٠	الحد الأعلى فأقل	١٠٠

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

$$ر_{٢} = ٣٠ + ٢٠ \times \frac{٥٠-٤٠}{٧٠-٤٠}$$

$$= ٣٠ + ٢٠ \times \frac{١٠}{٣٠}$$

$$\therefore ر_{٢} = ٣٦,٦٧$$

<u>الحل الثاني: عن طريق جدول التوزيع التكراري المتجمع الهابط:</u>

الفئات	التكرارات	الفئات المتجمعة الهابطة	التكرارات المتجمعة الهابطة
أقل من ٢٠	١٥	الحد الأدنى فأكثر	١٠٠
٢٠-	٢٥	٢٠ فأكثر	٨٥
		٣٠ فأكثر	٦٠
٣٠-	٣٠	$ر_{٢}$ ←	٥٠
٥٠-	٢٠	٥٠ فأكثر	٣٠
٨٠ فأكثر	١٠	٨٠ فأكثر	١٠
	١٠٠	أكثر من الحد الأعلى	صفر

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢} = \frac{٢٠٠}{٢} = ١٠٠$$

$$ر_{٢} = ٣٠ + ٢٠ \times \frac{٦٠-٥٠}{٦٠-٣٠}$$

$$= ٣٠ + ٢٠ \times \frac{١٠}{٣٠}$$

$$\therefore ر_{٢} = ٣٦,٦٧$$

(٢) الوسيط بالرسم

الخطوات:

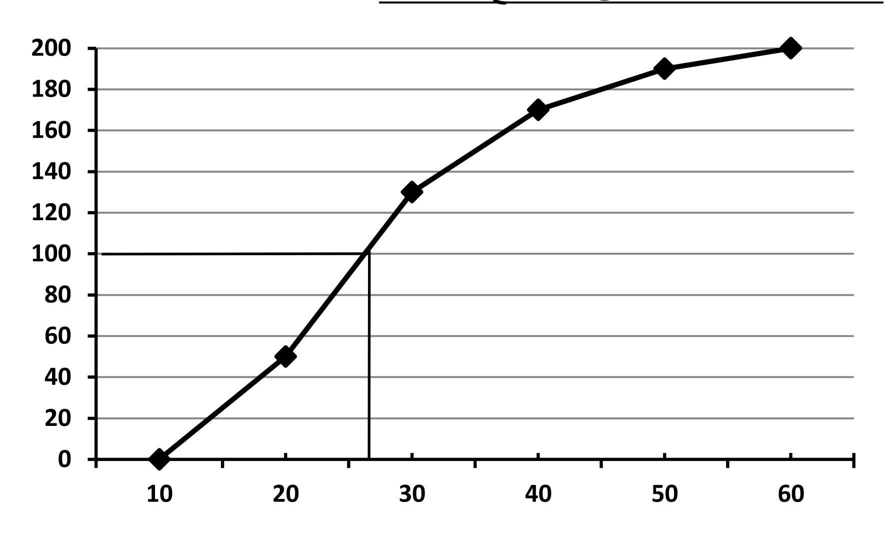
١. نكون جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط.
٢. نرسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط.
٣. نحدد ترتيب الوسيط حيث:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجـك}}{٢}$$

٤. نحدد ترتيب الوسيط على المحور الرأسى (التكرارات المتجمعة) ثم نرسم منه موازياً للمحور الأفقى فيتقاطع مع المنحنى المتجمع الصاعد أو الهابط فى نقطة نسقط منها عموداً على المحور الأفقى فيتحدد قيمة الوسيط.
٥. يمكن رسم المنحنيان المتجمعان الصاعد والهابط معاً فى رسم واحد فيتقاطع المنحنيان فى نقطة واحدة أمام ترتيب الوسيط نسقط منها عموداً على المحور الأفقى فيتحدد قيمة الوسيط.

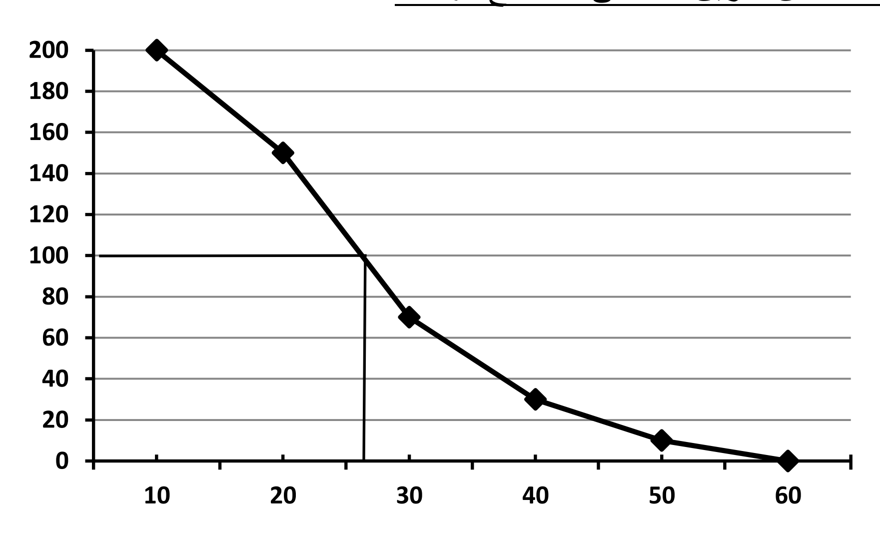
حل مثال (١)

الحل عن طريق المنحنى المتجمع الصاعد:



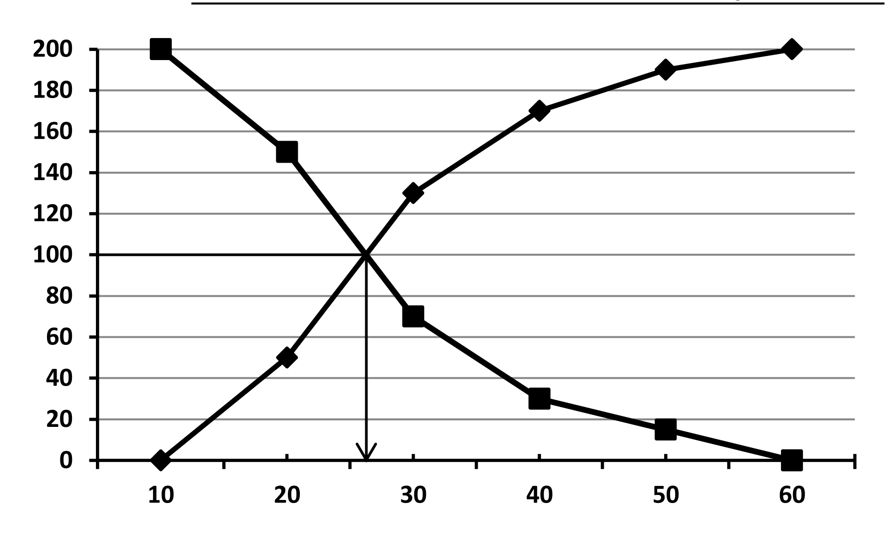
ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{2}$ = $\frac{200}{2}$ = ١٠٠ ∴ قيمة الوسيط ر٢ = ٢٦ تقريباً

الحل عن طريق المنحنى المتجمع الهابط:



ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{2}$ = $\frac{200}{2}$ = ١٠٠ ∴ قيمة الوسيط ر٢ = ٢٦ تقريباً

<u>الحل عن طريق المنحنيان المتجمعان الصاعد والهابط معاً:</u>



∴ قيمة الوسيط ر$_{٢}$ = ٢٦ تقريباً

الفصل الخامس
المنوال
Mode

خصائص المنوال:

١. لا يتأثر بالقيم المتطرفة.
٢. يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة من أحد طرفيها أو من الطرفين مثل الوسيط ولكن يفضل عدم استخدامه فى هذه الجداول لعدم معرفة طول الفئة المفتوحة وبالتالى نجهل تكرارها المعدل أى نفترض استبعادها مقدماً.
٣. يمكن حسابه بالرسم والحساب مثل الوسيط.
٤. يحتاج لتعديل التكرارات فى حالة الجداول التكرارية ذات الفئات غير المتساوية.
٥. يصلح للمتغيرات الوصفية بالإضافة للمتغيرات الكمية.
٦. قد يكون هناك منوالين أو أكثر للتوزيع الواحد وقد لا يوجد منوال على الإطلاق إذا لم يكن هناك قيمة شائعة وبالتالى لا يصلح فى هذه الحالة كمقياس مركزى.
٧. يعطى نتائج غير دقيقة ومتطرفة جداً فى حالة التوزيعات ذات المنحنيات الشديدة أو الحادة الالتواء حيث تصبح قيمة المنوال طرفية ولا تمثل المجموعة.
٨. يعتبر المنوال مقياس غير دقيق وغير ثابت حيث تختلف قيمته بإختلاف طريقة حسابه وطريقة تبويب البيانات من حيث أطوال

الفئات ، وجميع طرق حسابه تقريبية وأدقها طريقة الفروق وبالرسم عن طريق المدرج التكرارى يليهما فى الدقة طريقة الرافعة.

<u>أولاً: البيانات غير المبوبة:</u>

يعرف المنوال بأنه القيمة الشائعة أو القيمة الأكثر شيوعاً أو الأكثر تكراراً أى القيمة التى تحدث أكثر من أى قيمة غيرها فى المجتمع أو العينة.

<u>مثال (١):</u>

استخرج المنوال للقيم التالية:

٣ ، ٥ ، ٧ ، ٥ ، ٨ ، ٩ ، ٣ ، ٥

<u>الحل:</u>

القيمة الأكثر شيوعاً هى الرقم ٥

∴ المنوال (م) = ٥

<u>مثال (٢):</u>

استخرج المنوال للقيم التالية:

١٠ ، ١٢ ، ١٠ ، ١٥ ، ١٢ ، ١٧ ، ٢٠

<u>الحل:</u>

القيمة الأكثر تكراراً = القيمتان ١٠ ، ١٢

∴ يوجد فى هذه البيانات منوالين هما = ١٠ ، ١٢

مثال (٣):

استخرج المنوال للقيم التالية:

٢٠ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٣٥

الحل:

لا يوجد قيمة شائعة أو قيمة أكثر تكراراً

∴ لا يوجد منوال

ثانياً: البيانات المبوبة:

حالة الفئات المتساوية:

(١) المنوال بالحساب:

يمكن تعريف المنوال فى جداول التوزيعات التكرارية بأنه نقطة النهاية العظمى للتوزيع.

(أ) طريقة الرافعة أو عزوم القوى: Moments of Force

نحدد بداية الفئة المنوالية وهى الفئة التى يوجد بها أكبر تكرار فى التوزيع ولتحديد قيمة المنوال داخل هذه الفئة يلاحظ ما يلى:

- يقع المنوال فى مركز الفئة المنوالية فى حالة التوزيعات المتماثلة وفى هذه الحالة تتطابق جميع طرق حسابه بالرسم وبالحساب كما يتطابق مع المتوسطات الأخرى الوسط الحسابى والوسيط.
- أما فى حالة التوزيعات غير المتماثلة (الملتوية) يمكن اعتبار المنوال هو محور الارتكاز أو نقطة التوازن لرافعة طولها هو طول الفئة

المنوالية ولها قوتان فى طرفيها هما التكرار السابق عند الحد الأدنى للفئة المنوالية والتكرار اللاحق عند الحد الأعلى للفئة المنوالية ، وبتطبيق قاعدة الروافع التالية:

القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

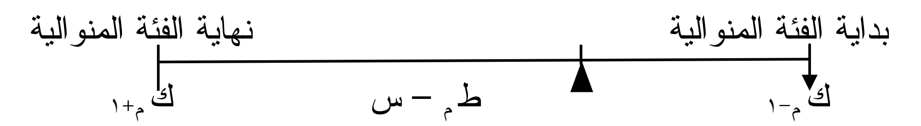
وبفرض أن قيمة المنوال (م) تبعد عن الحد الأدنى للفئة المنوالية بطول مقداره (س) وبالتالى تبعد عن الحد الأعلى للفئة المنوالية بطول مقداره (طول الفئة – س) أى ($ط_م$ – س) وذلك بفرض أن طول الفئة المنوالية = $ط_م$

وإذا رمزنا لتكرار الفئة المنوالية بالرمز $ك_م$

وإذا رمزنا للتكرار السابق بالرمز $ك_{م-١}$

وإذا رمزنا للتكرار اللاحق بالرمز $ك_{م+١}$

فإنه يمكن استنتاج العلاقة التالية:



ودائماً سيقترب المنوال من بداية الفئة المنوالية أو من نهايتها حسب التكرار الأكبر السابق أو اللاحق فإذا كان التكرار السابق هو الأكبر تتجه قيمة المنوال أو تقترب من بداية الفئة المنوالية وإذا كان التكرار اللاحق هو الأكبر تتجه قيمة المنوال أو تقترب من نهاية الفئة المنوالية وبديهى إذا تساوى التكراران السابق واللاحق يتمركز المنوال فى منتصف الفئة المنوالية.

بالتعويض فى قاعدة الروافع السابقة نجد أن:

ك $_{م-١}$ × س = ك$_{م+١}$ × (ط$_م$ – س)

ك $_{م-١}$ × س = ك$_{م+١}$ × ط$_م$ – ك$_{م+١}$ × س

ك $_{م-١}$ × س + ك$_{م+١}$ × س = ك$_{م+١}$ × ط$_م$

س (ك $_{م-١}$ + ك$_{م+١}$) = ك$_{م+١}$ × ط$_م$

$$\therefore \text{س} = \text{ط}_{\text{م}} \times \frac{\text{ك}_{\text{م}+١}}{\text{ك}_{\text{م}+١} + \text{ك}_{\text{م}-١}}$$

وبإضافة المسافة (س) على بداية الفئة المنوالية نحصل على قيمة المنوال.

$$\therefore \text{المنوال (م)} = \text{بداية الفئة المنوالية} + \text{ط}_{\text{م}} \times \frac{\text{ك}_{\text{م}+١}}{\text{ك}_{\text{م}+١} + \text{ك}_{\text{م}-١}}$$

<u>ملاحظة هامة:</u>

يلاحظ أن طريقة الرافعة تهمل قيمة أكبر تكرار وتعتمد فى حسابها على قيمة التكرارين السبق واللاحق.

<u>مثال:</u>

استخرج قيمة المنوال من التوزيع التكرارى التالى:

فئات	١٠–	٢٠–	٣٠–	٤٠–	٥٠–٦٠
تكرارات	١٠	٢٥	٣٥	١٥	٥

الحل:

$$\text{المنوال (م)} = ٣٠ + ١٠ \times \frac{١٥}{١٥+٢٥}$$

$$= ٣٠ + ١٠ \times \frac{١٥}{٤٠}$$

$$\therefore \text{(م)} = ٣٣,٧٥$$

(ب) طريقة الفروق (طريقة بيرسون): Pearson

تعتبر طريقة الفروق أدق طرق حساب المنوال لأنها تأخذ فى الاعتبار عند الحساب أكبر تكرار مع التكرارين السابق واللاحق له ، وتعتمد هذه الطريقة على إيجاد الفروق أو الانحرافات بين أكبر تكرار والتكرار السابق له مباشرة وبين أكبر تكرار والتكرار اللاحق له مباشرة ، ويقترب المنوال للحد الأدنى للفئة المنوالية أو الحد الأعلى للفئة المنوالية على أساس الفرق الأكبر للتكرار السابق أو اللاحق.

وإذا رمزنا للفروق بالرمز (ف) حيث:

الفرق الأول = أكبر تكرار – التكرار السابق له مباشرةً

$$ف_{١} = ك_{م} - ك_{م-١}$$

الفرق الثانى = أكبر تكرار – التكرار اللاحق له مباشرةً

$$ف_{٢} = ك_{م} - ك_{م+١}$$

$$م = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + ط_{م} \times \frac{ف_{١}}{ف_{١} + ف_{٢}}$$

حل المثال السابق بطريقة الفروق:

$ف_{١} = ٣٥ - ٢٥ = ١٠$

$ف_{٢} = ٣٥ - ١٥ = ٢٠$

$$م = ٣٠ + ١٠ \times \frac{١٠}{١٠+٢٠}$$

$$= ٣٠ + \frac{١٠}{٣}$$

$\therefore$ م = ٣٣,٣٣

(٢) المنوال بالرسم:

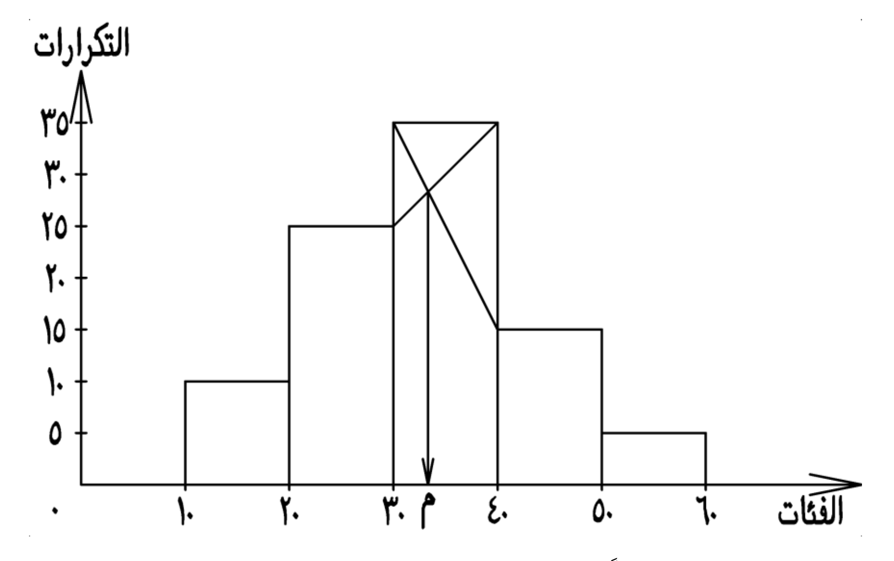
(أ) المنحنى التكرارى:

إذا تم رسم المنحنى التكرارى بدقة تامة يتحدد المنوال أسفل قمة المنحنى (أعلى نقطة فى المنحنى وهى نقطة النهاية العظمى للتوزيع) بحيث إذا أسقطنا منها عموداً على المحور الأفقى يتحدد قيمة المنوال ، ولكن هذه الطريقة تقريبية حيث تتوقف على مهارة الباحث فى رسم المنحنى ، كما لا يمكن استنتاج المنوال من المضلع التكرارى لأن أعلى نقطة ركنية فى المضلع التكرارى تتحدد فوق مركز الفئة المنوالية التى تتضمن أكبر تكرار والمنوال لا يكون فى مركز الفئة المنوالية إلا فى حالة التوزيع المتماثل فقط أو الذى يتساوى فيه التكراران السابق واللاحق لأكبر تكرار فى التوزيع أما فى التوزيعات الأخرى يجب أن يتجه أو يتحرك المنوال داخل الفئة المنوالية تجاه التكرار الأكبر السابق أو اللاحق.

(ب) المدرج التكرارى:

يعتبر من الطرق الدقيقة التى تعطى نتائج متماثلة لطريقة الفروق ، ويمكن أن نكتفى برسم الأعمدة الثلاثة فقط التى تحوى أكبر تكرار والتكراران السابق واللاحق إلا إذا كان المطلوب رسم المدرج التكرارى كاملاً واستنتاج المنوال منه.

حل المثال السابق بالرسم عن طريق المدرج التكرارى:



المنوال = ٣٣,٣ تقريباً

يلاحظ على الرسم السابق أننا قمنا بتوصيل الزاوية اليمنى القائمة لأكبر تكرار بالزاوية اليمنى القائمة للتكرار السابق بخط مستقيم ، كما قمنا بتوصيل الزاوية اليسرى القائمة لأكبر تكرار بالزاوية اليسرى القائمة للتكرار اللاحق بخط مستقيم ، ومن نقطة تقاطع الخطين معاً نسقط عموداً على المحور الأفقى فيتحدد قيم المنوال (م) بالرقم ٣٣,٣ تقريباً.

حالة الفئات غير المتساوية:

القاعدة: نعد أولاً جدول التكرارات المعدلة ثم نقوم بتطبيق نفس القوانين والطرق السابقة لاستنتاج المنوال بالحساب أو الرسم على أساس الفئات الأصلية مع التكرارات المعدلة.

مثال:

استخرج المنوال بالحساب والرسم للتوزيع التالى:

فئات	٥-	١٠-	٢٠-	٢٨-	٣٥-٥٠
تكرارات	٢٥	١٠٠	٦٤	٢٨	٤٥

الحل:

ف	ك	ط	ك ÷ ط
٥-	٢٥	٥	٥ ← $ك_{م-١}$
١٠-	١٠٠	١٠	١٠ ← $ك_{م}$
٢٠-	٦٤	٨	٨ ← $ك_{م+١}$
٢٨-	٢٨	٧	٤
٣٥-٥٠	٤٥	١٥	٣

(١) طريقة الرافعة:

$$م = \text{بداية الفئة المنوالية} + ط_{م} \times \frac{ك_{م+١}}{ك_{م+١} + ك_{م-١}}$$

$$= ١٠ + ١٠ \times \frac{٨}{٨+٥} = ١٦,١٥$$

(٢) طريقة الفروق:

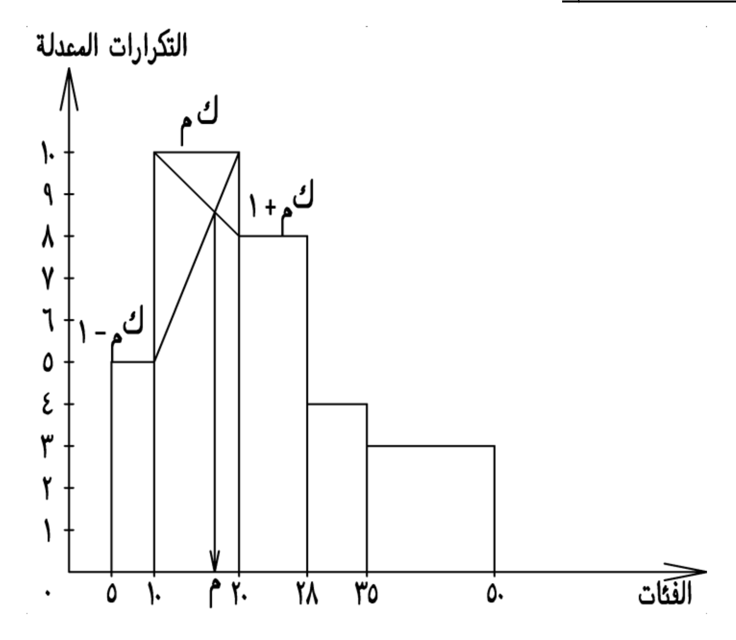
$$م = الحد الأدنى للفئة المنوالية + ط_م \times \frac{ف_١}{ف_١ + ف_٢}$$

$$= الحد الأدنى للفئة المنوالية + ط_م \times \frac{\left(ك_م - ك_{م-١}\right)}{\left(ك_م - ك_{م-١}\right)+\left(ك_م - ك_{م+١}\right)}$$

$$= ١٠ + ١٠ \times \frac{\left(١٠-٥\right)}{\left(١٠-٥\right)+\left(١٠-٨\right)} = ١٠ + ١٠ \times \frac{٥}{٥+٢}$$

$\therefore$ م = ١٧,١٤

(٣) المنوال بالرسم:



<u>ملاحظة:</u>

يمكن الاكتفاء برسم الأعمدة الثلاثة الأولى فقط والتى تحوى أكبر تكرار والتكراران السابق واللاحق.

<u>العلاقة بين المتوسطات الثلاث:</u> (الوسط الحسابى والوسيط والمنوال)

فى التوزيعات المتماثلة تتساوى المتوسطات الثلاث

الوسط الحسابى = الوسيط = المنوال

وكلما كان التوزيع ملتوياً كلما اختلفت المتوسطات الثلاث وابتعدت عن بعضها البعض وتزداد الفروق بينها كلما كان المنحنى أكثر إلتواءاً والعكس صحيح.

ودائماً يقترب الوسط الحسابى من ذيل المنحنى لأنه يتأثر كثيراً بالقيم الشاذة والمنوال يقع دائماً أسفل قمة المنحنى وهو أقل من الوسط الحسابى تأثراً بالقيم الشاذة وأكثر من الوسط الحسابى تأثراً بالقيم الشائعة ، أما الوسيط فيقع دائماً بين الوسط الحسابى والمنوال ، وقد وجد بالتجربة أن هناك علاقة تقريبية تجمع المتوسطات الثلاث وخاصةً إذا كان المنحنى قريباً من التماثل وليس شديد الالتواء وللتوزيع منوال واحد فقط وهذه العلاقة هى:

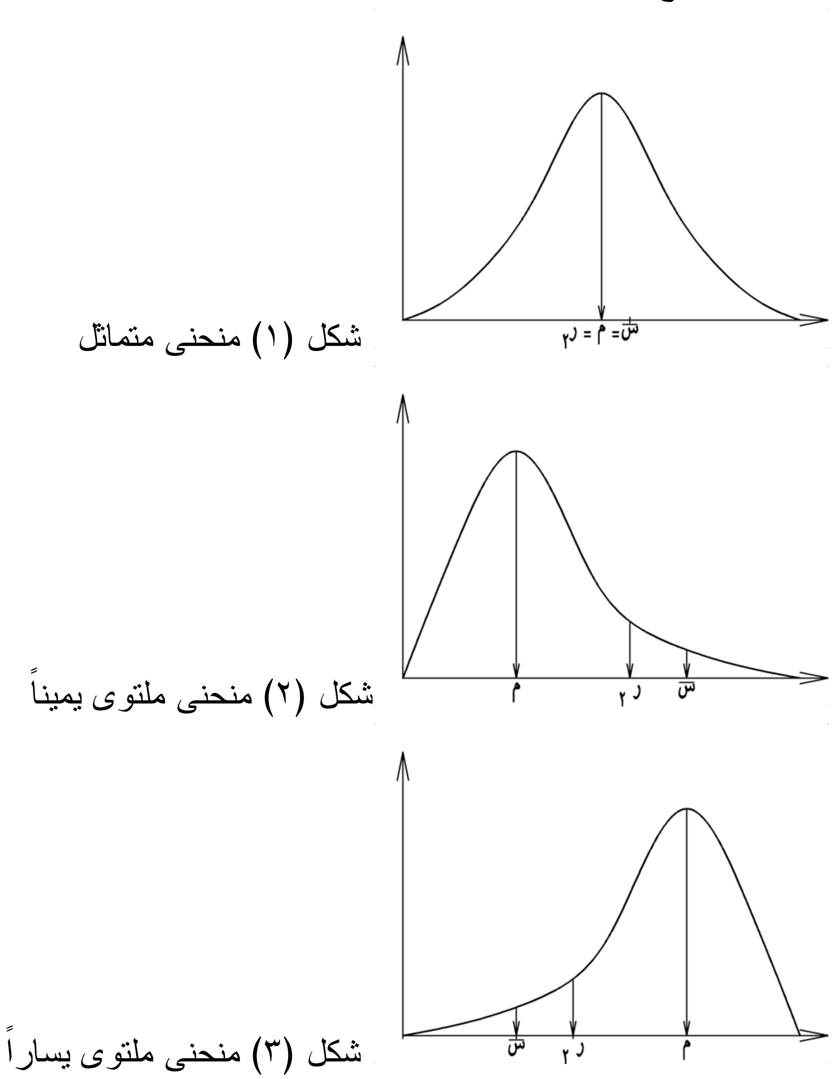
الوسط الحسابى – المنوال = ٣ (الوسط الحسابى – الوسيط)

$\overline{س} - م = ٣(\overline{س} - ر_{٢})$

وتستخدم العلاقة السابقة فى حساب قيم أى متوسط بمعلومية المتوسطان الآخران وخاصةً إذا كان المطلوب الوسط الحسابى من توزيع تكرارى

مفتوح من أحد طرفيه أو من الطرفين ، ويلاحظ أن قيمة الوسيط تقع دائماً بين الوسط الحسابى والمنوال ، كما يستخدم أحد طرفى العلاقة السابقة كمقياس لإلتواء المنحنيات وكلما زادت الفروق بين المتوسطات الثلاث كلما كان التوزيع أكثر إلتواءاً والعكس صحيح.

ويمكن توضيح العلاقات السابقة على الأشكال البيانية التالية:



شكل (١) منحنى متماثل

شكل (٢) منحنى ملتوى يميناً

شكل (٣) منحنى ملتوى يساراً

تمارين على الباب الثانى

١. قارن بين المتوسطات: الوسط الحسابى – الوسط الهندسى – الوسط التوافقى – الوسيط – المنوال للبيانات التالية:

٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠

٢.

الأسعار	١٠	١٥	٢٠	٣٠	٥٠
الكميات	٣	٥	٨	١٠	٦

المطلوب:

أ – الوسط الحسابى البسيط للأسعار

ب– الوسط الحسابى للأسعار المرجح بالكميات

ج– الوسط الهندسى البسيط للأسعار

د – الوسط الهندسى البسيط للكميات

٣. لدينا خمسة مجموعات من الطلبة ويبلغ عدد الطلبة فى كل مجموعة على الترتيب:

١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ١٨ ، ٢٥

فإذا علم أن متوسط طول الطالب فى كل مجموعة من المجموعات السابقة كان على الترتيب:

١٦٢ ، ١٦٧ ، ١٧٥ ، ١٧٨ ، ١٨٥

<u>المطلوب:</u>

أ – احسب الوسط الحسابى للأطوال فى كل المجموعات

ب– احسب الوسط الهندسى للأطوال فى كل المجموعات

٤.

فئات الأجر	٨٠–	١٠٠–	١٢٠–	١٤٠–	١٦٠–	١٨٠–٢٠٠
عدد العاملين	١٥	٣٥	٥٥	٤٠	٣٥	٢٠

المطلوب:

أ – الوسط الحسابى للأجور

ب– الوسط التوافقى للأجور

ج– الوسيط بالحساب

د – المنوال بالحساب بطريقتى الرافعة والفروق

٥.

فئات الوزن	٥٠–	٦٠–	٦٥–	٨٠–	٩٠–١١٠
عدد الطلبة	٣٠٠	٣٥٠	٧٥٠	٢٠٠	١٠٠

المطلوب:

أ – حساب متوسط الوزن

ب– حساب وسيط الوزن بالحساب وبالرسم

ج– حساب القيمة الشائعة للوزن بطريقة الرافعة وبالرسم

٦.

فئات الطول	أقل من ١٥٠	١٥٠-	١٥٥-	١٦٥-	١٨٠-	١٩٠-
عدد الطلبة	١٠	١٠٠	٣٠٠	١٥٠	٥٠	٢٠

المطلوب:

أ – حساب وسيط الطول بالحساب والرسم من الجدول المتجمع الهابط

ب– حساب المنوال بطريقة الفروق وبالرسم

ج– استنتاج الوسط الحسابى للطول بمعلومية الوسيط والمنوال

٧.

الفئات	١٧,٥-	٢٢,٥-	٢٧,٥-	٣٢,٥-	٣٧,٥-٤٢,٥
التكرارات	١٢	١٨	٣٠	١٥	٥

المطلوب:

أ – الوسط الحسابى

ب– ارسم المنحنى المتجمع الصاعد واستنتج منه الوسيط

ج– ارسم المدرج التكرارى واستنتج منه المنوال

٨.

الفئات	صفر-	٦-	١٠-	١٨-	٢٥-	٣٠-٤٠
التكرارات	٦٠	٨٠	٣٢٠	١٠٥	٥٠	٢٠

المطلوب:

أ – ارسم المنحنيين الصاعد والهابط معاً واستنتج منهما قيمة الوسيط

ب ارسم المدرج التكرارى واستنتج المنوال منه

ج- استنتج الوسط الحسابى من المقياسيين السابقين

٩.

الأوزان	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠
الأعداد	١٨	٢٧	٣٣	٦٥	٥٠	١٣	٧

المطلوب:

أ – الوسط الحسابى

ب الوسط الهندسى

ج- الوسيط بالحساب

د – المنوال بالحساب

الباب الثالث
مقاييس التشتت
Measures of Dispersion

الفصل الأول: الانحراف المتوسط

الفصل الثاني: الانحراف المعيارى

الفصل الثالث: نصف المدى الربيعى

الفصل الرابع: معامل الاختلاف والالتواء والعزوم والتفرطح

مقدمة:

إن مقياس النزعة المركزية لا يكفى وحده لوصف وتحليل البيانات وخاصة عند المقارنة بين متوسطين أو أكثر لمجموعات مختلفة من البيانات حيث لا يؤخذ فى الاعتبار مدى تقارب أو تباعد هذه البيانات عن أحد المتوسطات ، فقد يتساوى متوسطان لمجموعتين من البيانات بالرغم من تقارب البيانات الأولى من متوسطها وتباعد البيانات الثانية عن متوسطها كما يتضح من المثال التالى:

بيانات المتغير (س) هى = ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦

حيث متوسطها الحسابى $\overline{س}$ = ١٤

بيانات المتغير (ص) هى = ٧ ، ١٨ ، ٢٥ ، ١٥ ، ٥

حيث متوسطها الحسابى $\overline{س}$ = ١٤

أى أن المتغيريين لهما نفس الوسط الحسابى ولكن لا نستطيع الحكم على أن توزيع البيانات فى المجموعتين متشابه فإذا قمنا بحساب المدى لبيانات المتغيريين السابقين نجد أن:

المدى لبيانات المتغير (س) = ١٦ – ١٢ = ٤

المدى لبيانات المتغير (ص) = ٢٥ – ٥ = ٢٠

واضح أن بيانات المتغير الأول (س) أكثر تركزاً أو أقل تشتتاً حول وسطها الحسابى والعكس تماماً بيانات المتغير الثانى (ص) أقل تركزاً أو أكثر تشتتاً حول وسطها الحسابى.

وقد يتفق المدى لمجموعتين من البيانات ولكن أيضاً يختلف توزيع هذه البيانات حول متوسطها لذلك فالأصوب دائماً لاستكمال وصف البيانات أن يقاس مع المتوسط التشتت أو التباين أو الاختلاف وأن يقاس أيضاً الالتواء والتفرطح لاستكمال الوصف الكامل للبيانات.

وفى هذا الباب نتعرض لمقاييس التشتت وهى نوعان :

النوع الأول: مقاييس تشتت مطلقة :

وهذه المقاييس تعطى نتائج مطلقة تأخذ نفس وحدة قياس المتغير الأصلى ولذلك هى لا تصلح للمقارنة بين تشتت التوزيعات المختلفة إلا إذا اتحدت وحدات القياس. وهذه المقاييس هى: متوسط الانحرافات المطلقة – الانحراف المعيارى – المدى – نصف المدى الربيعى.

النوع الثانى: مقاييس التشتت النسبية:

هذه المقاييس تصلح للمقارنة بين تشتت التوزيعات المختلفة لأنها مقاييس نسبية ليس لها تمييز أو وحدة قياس وأهمها "معامل الاختلاف".

وسوف تتم الدراسة فى هذا الباب من خلال الفصول التالية:

الفصل الأول: الانحراف المتوسط

الفصل الثاني: الانحراف المعيارى

الفصل الثالث: نصف المدى الربيعى

الفصل الرابع: معامل الاختلاف والالتواء والعزوم والتفرطح

الفصل الأول
الانحراف المتوسط
Mean Deviation

<u>مقدمة:</u>

سبق أن ذكرنا فى خصائص الوسط الحسابى أن مجموع الانحرافات أو الفروق بين القيم المختلفة للتوزيع والوسط الحسابى يساوى صفراً ، لذلك يمكن إيجاد الفروق أو الانحرافات بين القيم الأصلية والوسط الحسابى وكلما اتسعت أو زادت هذه الفروق كلما كانت البيانات أكثر تشتتاً والعكس صحيح وإذا أهملنا إشارات هذه الفروق وتم حساب متوسطها المطلق يمكن استخدامه كمقياس لتشتت البيانات ، ويتم حساب متوسط الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابى أو الوسيط أو المنوال أو أى مقياس مركزى آخر ولكن أكثرهم شيوعاً واستخداماً هو متوسط الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابى.

خصائص الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابى:

١. يهمل الإشارات المختلفة للفروق أو الانحرافات.
٢. يأخذ جميع المفردات فى الاعتبار فى حسابه.
٣. لا يتأثر بالقيم الشاذة.
٤. لا يستجيب للعمليات الحسابية (الجمع والطرح والضرب والقسمة)

أولاً: البيانات غير المبوبة:

يتحدد متوسط الانحرافات المطلقة أو الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابى من التعريف السابق بالقانون التالى:

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجـ}\left|\left(\text{س}_{\text{ر}} - \overline{\text{س}}\right)\right|}{\text{ن}}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{\text{مجـ}\left|\left(\text{س}_{\text{ر}} - \text{ر}_{٢}\right)\right|}{\text{ن}}$$

مثال:

احسب متوسط الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابى والوسيط للبيانات التالية:

٢٠ ، ٢٥ ، ٣٥ ، ٢٨ ، ٢٢

الحل:

$$\text{الوسط الحسابى } \overline{\text{س}} = \frac{٢٠+٢٥+٣٥+٢٨+٢٢}{٥}$$

$\therefore \overline{\text{س}} = ٢٦$

الوسيط بعد ترتيب القراءات تصاعدياً

٢٠ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٥

$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{٥+١}{٢} = ٣$ (الوسيط هو القراءة الثالثة)

$\therefore \text{ر}_{٢} = ٢٥$

متوسط الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابى:

س	س − $\overline{\text{س}}$	| س − $\overline{\text{س}}$ |
٢٠	−٦	٦
٢٥	−١	١
٣٥	٩	٩
٢٨	٢	٢
٢٢	−٤	٤
	صفر	٢٢
	مجـ (س − $\overline{\text{س}}$)	مجـ | س − $\overline{\text{س}}$ |

متوسط الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابى = $\frac{٢٢}{٥}$ = ٤,٥

متوسط الانحرافات المطلقة عن الوسيط:

س	س − ر$_{٢}$	| س − ر$_{٢}$ |
٢٠	−٥	٥
٢٥	صفر	صفر
٣٥	١٠	١٠
٢٨	٣	٣
٢٢	−٣	٣
	٥	٢١
	مجـ (س − ر$_{٢}$)	مجـ | س − ر$_{٢}$ |

متوسط الانحرافات المطلقة عن الوسيط = $\frac{٢١}{٥}$ = ٤,٢

ثانياً: البيانات المبوبة:

فى الجداول التكرارية يحسب متوسط الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابى أو الوسيط مرجحاً بالتكرارات حيث:

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجـ ك} \left| \text{س} - \bar{\text{س}} \right|}{\text{مجـ ك}}$$

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك} \left| \text{س} - \text{ر}_2 \right|}{\text{مجـ ك}}$$

مثال:

احسب كل من الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابى وعن الوسيط للتوزيع التالى:

فئات	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-١٠٠
تكرارات	١٠	١٥	١٨	١٧	١٢	٨

الحل:

ف	ك	س	ك س	| س - $\bar{\text{س}}$ |	ك | س - $\bar{\text{س}}$ |
٤٠-	١٠	٤٥	٤٥٠	٢٣,٧٥	٢٣٧,٥٠
٥٠-	١٥	٥٥	٨٢٥	١٣,٧٥	٢٠٦,٢٥
٦٠-	١٨	٦٥	١١٧٠	٣,٧٥	٦٧,٥٠
٧٠-	١٧	٧٥	١٢٧٥	٦,٢٥	١٠٦,٢٥
٨٠-	١٢	٨٥	١٠٢٠	١٦,٢٥	١٩٥
٩٠-١٠٠	٨	٩٥	٧٦٠	٢٦,٢٥	٢١٠
	٨٠ مجـ ك		٥٥٠٠ مجـ ك س		١٠٢٢,٥٠ مجـ ك | س - $\bar{\text{س}}$ |

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}} = \frac{٥٥٠٠}{٨٠} = ٦٨,٧٥$$

الانحراف المتوسط عن الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجـ ك} |س - \bar{س}|}{\text{مجـ ك}}$

= $\frac{١٠٢٢,٥}{٨٠}$ = ١٢,٧٨

<u>حساب الوسيط عن طريق الجدول المتجمع الصاعد:</u>

الفئات	التكرارات	الفئات المتجمعة الصاعدة	التكرارات المتجمعة الصاعدة	
٤٠-	١٠	أقل من ٤٠	صفر	
٥٠-	١٥	أقل من ٥٠	١٠	
	١٨	أقل من ٦٠	٢٥	تكرار الحد الأدنى
٦٠-		$ر_٢$ ←	٤٠	ترتيب الوسيط
٧٠-	١٧	أقل من ٧٠	٤٣	تكرار الحد الأعلى
٨٠-	١٢	أقل من ٨٠	٦٠	
٩٠-١٠٠	٨	أقل من ٩٠	٧٢	
	٨٠ مجـ ك	١٠٠ فأقل	٨٠	

ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـ ك}}{٢}$ = $\frac{٨٠}{٢}$ = ٤٠

$ر_٢$ = ٦٠ + ١٠ × $\frac{٤٠ - ٢٥}{٤٣ - ٢٥}$

∴ $ر_٢$ = ٦٨,٣٣

ف	ك	س	|س - $ر_٢$|	ك|س - $ر_٢$|
٤٠-	١٠	٤٥	٢٣,٣٣	٢٣٣,٣٠
٥٠-	١٥	٥٥	١٣,٣٣	١٩٩,٩٥
٦٠-	١٨	٦٥	٣,٣٣	٥٩,٩٤
٧٠-	١٧	٧٥	٦,٦٧	١١٣,٣٩
٨٠-	١٢	٨٥	١٦,٦٧	٢٠٠,٠٤
٩٠-١٠٠	٨	٩٥	٢٦,٦٧	٢١٣,٣٦
	٨٠ مجـ ك			١٠١٩,٩٨ مجـ |س - $ر_٢$|

$$\text{الانحراف المتوسط عن الوسيط} = \frac{\text{مجـ ك} \left| \text{س} - \text{ر}_{٢} \right|}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{١٠١٩,٩٨}{٨٠} = ١٢,٧٥$$

<u>ملاحظة:</u>

يقترب الانحراف المتوسط عن الوســط الحسابى من الانحراف المتوســط عن الوسيط وذلك لأن المنحنى قريب جداً من التماثل وفى المنحنيات المتماثلة يتعادل الانحرافان تماماً لأن المتوسطات الثلاث تتعادل (الوسط الحسابى = الوسيط = المنوال)

الفصل الثانى
الانحراف المعيارى
Standard Deviation

خصائص الانحراف المعيارى:

١. من أدق مقاييس التشتت المطلقة وأكثرها شيوعاً أو استخداماً ولكنه لا يصلح للمقارنات بين تشتت التوزيعات المختلفة إلا إذا كان لها نفس وحدة القياس حيث أن الانحراف المعيارى يأخذ نفس وحدة قياس المتغير الأصلى.

٢. يستخدم جميع مفردات المتغير عند حسابه.

٣. يعالج أهم عيوب الانحراف المتوسط الذى يهمل الاشارات عند إيجاد مجموع الانحرافات المطلقة ولا يمكن حسابه على أساس الانحرافات عن الوسيط أو المنوال.

٤. لا يمكن حسابه من الجداول المفتوحة.

٥. الانحراف المعيارى يحسب على أساس مجموع مربعات انحرافات القيم عن الوسط الحسابى وهى دائماً أصغر ما يمكن إذا ما قورنت بمجموع مربعات انحرافات القيم عن أى متوسط مركزى آخر.

٦. إذا ربعنا الانحراف المعيارى نحصل على مقياس جديد يطلق عليه التباين Variance ولذلك فالتباين هو مربع الانحراف المعيارى ويكون الانحراف المعيارى هو جذر التباين والتباين له استخدامات هامة ومتعددة خاصة فى علم الإحصاء التحليلى.

٧. يعتبر الانحراف المعيارى أحد العناصر الرئيسية المكونة لمعادلة المنحنى الطبيعى ومعادلات بعض التوزيعات الأخرى غير المتماثلة

وفى حساب الارتباط والانحدار وكثير من موضوعات الإحصاء الوصفى والتحليلى.

8. لا يتأثر الانحراف المعيارى بالجمع والطرح ولكنه يتأثر بالضرب والقسمة ويجب مراعاة تأثير ذلك على الناتج النهائى.

أولاً: البيانات غير المبوبة:

الانحراف المعيارى هو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى لذلك فهو يعالج عيوب الانحراف المتوسط حيث نوجد انحرافات القيم عن الوسط الحسابى ثم نربع هذه الانحرافات حتى تصبح كلها موجبة ونوجد متوسطها ، وأخيراً نوجد الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابى فينتج الانحراف المعيارى.

وبفرض أننا سنرمز للإنحراف المعيارى بالرمز (ع) إذن يصبح التباين ($ع^2$) وبالتطبيق الرياضى للتعريف السابق نجد أن:

$$ع^2 = \frac{مجـ\left(س - \overline{س}\right)^2}{ن}$$

ويمكن تبسيط للقانون السابق رياضياً كما يلى:

$$ع^2 = \frac{مجـ\left(س^2 - 2س \times \overline{س} + \overline{س}^2\right)}{ن}$$

$$= \frac{مجـ س^2}{ن} - \frac{2\overline{س} \times مجـ س}{ن} + \frac{ن \times \overline{س}^2}{ن}$$

$$= \frac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}} - ٢\bar{\text{س}} \times \bar{\text{س}} + \bar{\text{س}}^{٢}$$

$$= \frac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}} - ٢\,\bar{\text{س}}^{٢} + \bar{\text{س}}^{٢}$$

$$= \frac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}^{٢}$$

$$\therefore \text{ع}^{٢} = \frac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{٢}$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}\right)^{٢}}$$

مثال:

احسب التباين والانحراف المعيارى للقيم التالية:

٤ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٥

الحل:

س	$\text{س}^{٢}$
٤	١٦
٥	٢٥
٨	٦٤
١٠	١٠٠
١٢	١٤٤
١٥	٢٢٥
٥٤ مجـ س	٥٧٤ مجـ $\text{س}^{٢}$

$$\therefore ع^{٢} = \frac{مجـ س^{٢}}{ن} - \left(\frac{مجـ س}{ن}\right)^{٢}$$

$$= \frac{٥٧٤}{٦} - \left(\frac{٥٤}{٦}\right)^{٢}$$

$$= ٩٥,٦٧ - ٨١ = ١٤,٦٧$$

$$\therefore ع = \sqrt{١٤,٦٧} = ٣,٨٣$$

ولا يتأثر الإنحراف المعيارى عند تبسيط البيانات بطرح أو جمع وسط فرضى حيث أن الطرح والجمع لا يؤثران على الناتج النهائى ولكنه يتأثر بعمليات الضرب والقسمة ولذلك لابد من معالجة نتائجها بالعملية العكسية تماماً.

ثانياً: البيانات المبوبة:

(١) الطريقة المطولة:

يعرف الإنحراف المعيارى فى التوزيعات التكرارية بأنه متوسط مجموع مربعات الإنحرافات أو الفروق عن الوسط الحسابى مرجحاً بالتكرارات حيث:

$$ع^{٢} = \frac{مجـ ك \left(س - \overline{س}\right)^{٢}}{مجـ ك}$$

ويمكن تبسيط العلاقة السابقة بنفس خطوات التبسيط التى أجريناها فى البيانات غير المبوبة بحيث نصل للقانون التالى:

$$\therefore\ ع^{٢} = \frac{مجـ ك س^{٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك س}{مجـ ك}\right)^{٢}$$

$$\therefore\ ع = \sqrt{\frac{مجـ ك س^{٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك س}{مجـ ك}\right)^{٢}}$$

(٢) الطريقة المختصرة:

إذا قمنا بتبسيط العمليات الحسابية فى التوزيع عن طريق اختيار وسط فرضى مناسب (أ) واستبعاده من جميع مراكز الفئات دون أن تتأثر النتيجة النهائية للانحراف المعيارى نتيجة عمليات الطرح أوالجمع ويمكن استخدام نفس الصيغة الرياضية السابقة باستبدال مراكز الفئات بالانحرافات فقط ويصبح الإنحراف المعيارى هو متوسط مجموع مربعات الفروق بين الانحرافات عن وسط فرضى والوسط الحسابى مرجحاً بالتكرارات كما يلى:

$$ع^{٢} = \frac{مجـ ك \left(ح - \overline{س}\right)^{٢}}{مجـ ك}$$

وبتبسيط العلاقة السابقة يمكن أن نصل لنفس الصورة كما يلى:

$$ع^{٢} = \frac{مجـ ك ح^{٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك ح}{مجـ ك}\right)^{٢}$$

$$\therefore\ ع = \sqrt{\frac{مجـ ك ح^{٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك ح}{مجـ ك}\right)^{٢}}$$

(٣) الطريقة المختصرة المختزلة:

إذا قسمنا انحرافات الوسط الحسابى عن وسط فرضى على عامل مشترك سواء كان طول الفئة فى الجداول التكرارية ذات الفئات المتساوية أو أى عامل مشترك آخر وليكن (ط) فإن الإنحراف المعيارى يتأثر بالعامل المشترك (عامل الاختزال) ولابد من ضرب الناتج النهائى فى العامل المشترك (ط) كما يلى:

$$ع^{٢} = ط^{٢} \left\{ \frac{مجـ ك ح'^{٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك ح'}{مجـ ك} \right)^{٢} \right\}$$

$$\therefore ع = ط \sqrt{\frac{مجـ ك ح'^{٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك ح'}{مجـ ك} \right)^{٢}}$$

مثال:

احسب التباين والإنحراف المعيارى للتوزيع التكرارى التالى:

فئات الأجر	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-	١٨٠-	٢٠٠-	٢٢٠-٢٤٠
عدد العاملين	٢٠	٣٠	٥٠	٨٠	٤٠	٢٥	١٥

(١) الطريقة المطولة:

نقوم بإعداد نفس الجدول المعد عند حساب الوسط الحسابى ($\overline{س}$) بالطريقة المطولة ونضيف عليه خانة إضافية جديدة تنتج من ضرب خانة (ك س) فى خانة (س) لتنتج الخانة (ك $س^{٢}$) كما يلى:

ف	ك	س	ك س	ك س²
١٠٠-	٢٠	١١٠	٢٢٠٠	٢٤٢٠٠٠
١٢٠-	٣٠	١٣٠	٣٩٠٠	٥٠٧٠٠٠
١٤٠-	٥٠	١٥٠	٧٥٠٠	١١٢٥٠٠٠
١٦٠-	٨٠	١٧٠	١٣٦٠٠	٢٣١٢٠٠٠
١٨٠-	٤٠	١٩٠	٧٦٠٠	١٤٤٤٠٠٠
٢٠٠-	٢٥	٢١٠	٥٢٥٠	١١٠٢٥٠٠
٢٢٠-٢٤٠	١٥	٢٣٠	٣٤٥٠	٧٩٣٥٠٠
	٢٦٠ مجـ ك		٤٣٥٠٠ مجـ ك س	٧٥٢٦٠٠٠ مجـ ك س²

$$ع^{٢} = \frac{\text{مجـ ك س}^{٢}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}$$

$$= \frac{٧٥٢٦٠٠٠}{٢٦٠} - \left(\frac{٤٣٥٠٠}{٢٦٠}\right)^{٢}$$

$$= ٢٨٩٤٦,١٥ - ٢٧٩٩١,٨٦$$

$$\therefore ع^{٢} = ٩٥٤,٢٩$$

$$\therefore ع = \sqrt{٩٥٤,٢٩} = ٣٠,٨٩ \text{ جنيه}$$

(٢) الطريقة المختصرة:

نقوم بإعداد نفس الجدول المعد عند حساب الوسط الحسابى ($\overline{س}$) بالطريقة المختصرة ونضيف عليه خانة إضافية جديدة تنتج من ضرب خانة (ك ح) فى خانة (ح) لتنتج الخانة (ك ح²) كما يلى:

ف	ك	س	ح	ك ح	ك ح²
١٠٠-	٢٠	١١٠	-٦٠	-١٢٠٠	٧٢٠٠٠
١٢٠-	٣٠	١٣٠	-٤٠	-١٢٠٠	٤٨٠٠٠
١٤٠-	٥٠	١٥٠	-٢٠	-١٠٠٠	٢٠٠٠٠
١٦٠-	٨٠	١٧٠	صفر	صفر	صفر
١٨٠-	٤٠	١٩٠	٢٠	٨٠٠	١٦٠٠٠
٢٠٠-	٢٥	٢١٠	٤٠	١٠٠٠	٤٠٠٠٠
٢٢٠-٢٤٠	١٥	٢٣٠	٦٠	٩٠٠	٥٤٠٠٠
	٢٦٠ مجـ ك			-٧٠٠ مجـ ك ح	٢٥٠٠٠٠ مجـ ك ح²

حيث أ = ١٧٠

$$ع^{2} = \frac{\text{مجـ ك ح}^{2}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك ح}}{\text{مجـ ك}}\right)^{2}$$

$$= \frac{٢٥٠٠٠٠}{٢٦٠} - \left(\frac{-٧٠٠}{٢٦٠}\right)^{2}$$

$$= ٩٦١,٥٤ - ٧,٢٥$$

$$\therefore ع^{2} = ٩٥٤,٢٩$$

$$\therefore ع = \sqrt{٩٥٤,٢٩} = ٣٠,٨٩ \text{ جنيه}$$

يتضح من الحل السابق أن الإنحراف المعيارى لم يتأثر بطرح وسط فرضى (أ) من مراكز الفئات.

(٣) الطريقة المختصرة المختزلة:

نقوم بإعداد نفس الجدول المعد عند حساب الوسط الحسابى ($\overline{س}$) بالطريقة المختصرة ونضيف عليه خانة إضافية جديدة تنتج من ضرب خانة (ك حَ) فى خانة (حَ) لتنتج الخانة (ك $حَ^2$) كما يلى:

ف	ك	س	ح	حَ	ك حَ	ك $حَ^2$
١٠٠–	٢٠	١١٠	–٦٠	–٣	–٦٠	١٨٠
١٢٠–	٣٠	١٣٠	–٤٠	–٢	–٦٠	١٢٠
١٤٠–	٥٠	١٥٠	–٢٠	–١	–٥٠	٥٠
١٦٠–	٨٠	١٧٠	صفر	صفر	صفر	صفر
١٨٠–	٤٠	١٩٠	٢٠	١	٤٠	٤٠
٢٠٠–	٢٥	٢١٠	٤٠	٢	٥٠	١٠٠
٢٢٠–٢٤٠	١٥	٢٣٠	٦٠	٣	٤٥	١٣٥
	٢٦٠ مجـ ك				–٣٥ مجـ ك حَ	٦٢٥ مجـ ك $حَ^2$

حيث أ = ١٧٠ لا يتأثر بها الإنحراف المعيارى

حيث ط = ٢٠ يتأثر بها الإنحراف المعيارى

$$ع^2 = ط^2 \left\{ \frac{مجـ ك حَ^2}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك حَ}{مجـ ك} \right)^2 \right\}$$

$$= ٢٠^2 \left\{ \frac{٦٢٥}{٢٦٠} - \left(\frac{-٣٥}{٢٦٠} \right)^2 \right\}$$

$$\therefore ع^2 = ٩٥٤,٤$$

$$\therefore ع = \sqrt{٩٥٤,٤} = ٣٠,٨٩ \text{ جنيه}$$

تصحيح شبرد Sheppard's Correction:

فى البيانات المبوبة فقط فى جداول تكرارية افترضنا أن التكرارات داخل كل فئة موزعة بإنتظام على مدار الفئة ولذلك أعطينا كل تكرار قيمة متوسطة هى مركز الفئة بالرغم من اختلاف ذلك تماماً مع واقع البيانات المفردة الفعلية قبل تبويبها ، ويتوقف هذا التقريب على طول الفئة من ناحية ومدى التوزيع المنتظم للتكرارات داخل الفئة من ناحية أخرى ، ولذلك اقترح "شبرد – Sheppard" معالجة هذا الخطأ الفرضى بأن يتم طرح المقدار $\frac{ط^{٢}}{١٢}$ تحت الجذر التربيعى للإنحراف المعيارى حيث يصبح قانون الإنحراف المعيارى بعد التصحيح كما يلى:

$$ع = \sqrt{\left\{\frac{مجـ ك س^{٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك س}{مجـ ك}\right)^{٢}\right\} - \frac{ط^{٢}}{١٢}}$$

حيث (ط) هى طول الفئة وبتطبيق هذا التصحيح على المثال السابق نجد أن:

$$ع = \sqrt{٩٥٤,٤ - \frac{٢٠^{٢}}{١٢}}$$

$$= \sqrt{٩٥٤,٤ - ٣٣,٣} = \sqrt{٩٢١,١}$$

$\therefore$ ع = ٣٠,٣٥ جنيه

الفصل الثالث
نصف المدى الربيعى
Semi Interquartile Range

<u>المدى:</u> Range

المدى لمجموعة من القيم أو المشاهدات عبارة عن الفرق بين أكبر قراءة وأصغر قراءة يمكن أن يأخذها المتغير ، ويعبر المدى عن التشتت المطلق بين القيم أو القراءات ولكنه أقل مقاييس التشتت المطلقة دقة بالرغم من أنه سهل الحساب ولكنه يتأثر بشدة بالقيم الشاذة ، كما لا يأخذ كل القيم فى الاعتبار عند الحساب بل يكتفى بقيمتين فقط أكبر قيمة وأصغر قيمة وبالرغم من العيوب السابقة فهو مؤشر للتشتت خاصة فى المجموعات الكبيرة جداً.

ويمكن حساب التشتت أيضاً من الجداول التكرارية وذلك عن طريق الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى ولذلك لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.

كما يستخدم المدى كثيراً فى خرائط مراقبة جودة الإنتاج لكثرة العينات المأخوذة على فترات متقاربة.

<u>مثال ١:</u>

احسب المدى للقيم التالية:

١٢ ، ٢٤ ، ٦٥ ، ٨ ، ٣٦ ، ٤٥

<u>الحل:</u>

المدى = ٦٥ – ٨ = ٧٧

ويمكن التعبير عن المدى بطريقة أخرى وذلك بأن نقول المدى للقيم السابقة يتراوح بين ٨ ، ٦٥

مثال٢:

احسب المدى للتوزيع التكرارى التالى:

ف	٥–	١٠–	١٥–	٢٠–	٢٥–	٣٠–	٣٥–٤٠
ك	١٠	٣٠	٥٠	٧٠	٤٠	٢٠	١٠

الحل:

المدى = ٤٠ – ٥ = ٣٥

نصف المدى الربيعى: Semi Interquartile Range

خصائص نصف المدى الربيعى:

١. نصف المدى الربيعى أصعب فى طريقة حسابه من المدى ولكنه يعالج بعض عيوب المدى ومن أهمها أنه يهمل القراءات المتطرفة.
٢. لا يأخذ كل المفردات فى الاعتبار عند الحساب ولكنه يعتمد على قراءتين فقط مثل المدى القراءة الأولى وتقع فى نهاية الربع الأول للبيانات والقراءة الثانية التى تقع فى نهاية الربع الثالث للبيانات وذلك بعد ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً.

وكما رأينا فى الفصل السابق أن الإنحراف المعيارى يعتمد على الإنحرافات أو الفروق عن الوسط الحسابى نجد أن نصف المدى الربيعى يعتمد فى حسابه على الإنحراف بين الربيع الأعلى والوسيط أو الربيع الأدنى والوسيط حيث يفترض أن الوسيط يقع فى منتصف المسافة بين

الربيع الأدنى والربيع الأعلى خاصةً إذا كان التوزيع متماثلاً ، ولذلك فإن نصف المدى الربيعى يعنى منتصف المسافة بين الربيعين الأدنى والأعلى والتى تعادل المسافة بين أحد الربيعين والوسيط والتى يمكن اعتبارها مقياساً مطلقاً للتشتت.

أولاً: البيانات غير المبوبة:

بعد ترتيب القراءات أو القيم ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازلياً يمكن تحديد المفاهيم التالية:

١. الربيع الأول (الأدنى) ر١ (Lower) First Quartile

هو القيمة التى يقع أقل منها أو دونها ربع القيم المختلفة للمتغير وبالتالى يقع أكثر منها ثلاثة أرباع القيم المختلفة للمتغير وذلك من ناحية العدد فقط.

٢. الربيع الثانى (الوسيط) ر٢ Second Quartile

هو القيمة التى يقع أقل منها أو دونها نصف القيم المختلفة للمتغير وبالتالى يقع أكثر منها النصف الآخر لقيم المتغير وذلك من ناحية العدد فقط.

٣. الربيع الثالث (الأعلى) ر٣ (Upper) Third Quartile

هو القيمة التى يقع أقل منها أو دونها ثلاثة أرباع القيم المختلفة للمتغير وبالتالى يقع أكثر منها الربع الآخر لقيم المتغير وذلك من ناحية العدد فقط.

ويتم حساب الربيع الأول والربيع الثالث بنفس طريقة حساب الوسيط الواردة فى الباب الثانى من هذا الكتاب مع اختلاف ترتيب كل ربيع.

خطوات الحساب:

١. ترتيب القراءات أو القيم ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازلياً.

٢. نحدد ترتيب الربيعين كما يلى:

- ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{ن}{٤}$

- ترتيب الربيع الأعلى = $\frac{٣ن}{٤}$

٣. نحدد قيمة الربيعين $ر_١$ ، $ر_٣$ بالعد حسب الترتيبين السابقين.

٤. نصف المدى الربيعى = $\frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$

مثال:

استخرج نصف المدى الربيعى للقيم التالية:

٢٠ ، ١٤ ، ٢٥ ، ١٨ ، ٢٢ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ١٠ ، ٤٠

الحل:

١. ترتيب القراءات تصاعدياً

١٠ ، ١٤ ، ١٨ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠

٢. ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{ن}{٤}$ = $\frac{١٠}{٤}$ = ٢,٥

أى أن قيمة الربيع الأدنى تقع بين القراءتين الثانية والثالثة

$$\therefore ر_{١} = \frac{١٤+١٨}{٢} = ١٦$$ الوسط الحسابى للقراءتين

٣. ترتيب الربيع الأعلى = $\frac{٣ن}{٤} = \frac{٣ \times ١٠}{٤} = ٧,٥$

أى أن قيمة الربيع الأعلى تقع بين القراءتين السابعة والثامنة

$$ر_{٣} = \frac{٢٨+٣٠}{٢} = ٢٩$$ الوسط الحسابى للقراءتين

٤. نصف المدى الربيعى = $\frac{ر_{٣} - ر_{١}}{٢} = \frac{٢٩-١٦}{٢} = ٦,٥$

<u>ثانياً: البيانات المبوبة:</u>

<u>(١) نصف المدى الربيعي بالحساب:</u>

<u>الخطوات:</u>

- نكون جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط
- نحدد ترتيب الربيعين:

ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{مجـ ك}{٤}$

ترتيب الربيع الأعلى = $\frac{٣ مجـ ك}{٤}$

- نحدد التكراران المتجمعان اللذان يُحصر بينهما ترتيب الربيعين ، ثم نحدد فئتى الربيعين المقابلة ونوجد قيمة الربيعين داخل الفئتين بالنسبة

والتناسب (على أساس الاستكمال الرياضى الخطى) الذى يفترض أن التكرارات موزعة بإنتظام داخل الفئة ولذلك يمكن استخدام القوانين التالية:

<u>حالة الجدول التكرارى المتجمع الصاعد:</u>

$$ر_1 = \text{الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى} + \text{طول فئة الربيع الأدنى} \times \frac{\text{ترتيب الربيع الأدنى} - \text{تكرار الحد الأدنى}}{\text{تكرار الحد الأعلى} - \text{تكرار الحد الأدنى}}$$

$$ر_3 = \text{الحد الأدنى لفئة الربيع الأعلى} + \text{طول فئة الربيع الأعلى} \times \frac{\text{ترتيب الربيع الأعلى} - \text{تكرار الحد الأدنى}}{\text{تكرار الحد الأعلى} - \text{تكرار الحد الأدنى}}$$

<u>حالة الجدول التكرارى المتجمع الهابط:</u>

$$ر_1 = \text{الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى} + \text{طول فئة الربيع الأدنى} \times \frac{\text{تكرار الحد الأدنى} - \text{ترتيب الربيع الأعلى}}{\text{تكرار الحد الأدنى} - \text{تكرار الحد الأعلى}}$$

$$ر_3 = \text{الحد الأعلى لفئة الربيع الأعلى} + \text{طول فئة الربيع الأعلى} \times \frac{\text{تكرار الحد الأدنى} - \text{ترتيب الربيع الأدنى}}{\text{تكرار الحد الأدنى} - \text{تكرار الحد الأعلى}}$$

<u>ملاحظة هامة:</u>

فى الجدول التكرارى المتجمع الهابط نجد أن ترتيب الربيع الأدنى يعطى قيمة الربيع الأعلى وترتيب الربيع الأعلى يعطى قيمة الربيع الأدنى.

(٢) نصف المدى الربيعى بالرسم:

الخطوات:

- نكون جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط
- نرسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد أو الهابط
- نحدد ترتيب الربيعين:

$$\text{ترتيب الربيع الأدنى} = \frac{\text{مجـ ك}}{٤}$$

$$\text{ترتيب الربيع الأعلى} = \frac{\text{٣ مجـ ك}}{٤}$$

- نحدد ترتيب الربيعين السابقين على المحور الرأسى (التكرارات المتجمعة) ونرسم منهما خطان موازيان للمحور الأفقى فيتقاطعا مع المنحنى التكرارى المتجمع فى نقطتين نسقط منهما عمودان على المحور الأفقى فيتحدد قيمة الربيعين.

مثال:

استخرج نصف المدى الربيعى بالحساب وبالرسم للتوزيع التالى:

فئات الوزن بالكيلو	٦٠–	٧٠–	٨٠–	٩٠–	١٠٠–١١٠
عدد الطلبة	٢٠	٣٥	١٥	٢٠	١٠

الحل:

(١) نصف المدى الربيعى بالحساب:

أ – عن طريق الجدول المتجمع الصاعد:

الفئات	التكرارات	فئات متجمعة صاعدة	تكرارات متجمعة صاعدة
٦٠-	٢٠	أقل من ٦٠	صفر
٧٠-	٣٥	أقل من ٧٠	٢٠
		$ر_١$ ←	٢٥
٨٠-	١٥	أقل من ٨٠	٥٥
٩٠-	٢٠	أقل من ٩٠	٧٠
		$ر_٣$ ←	٧٥
١٠٠-١١٠	١٠	أقل من ١٠٠	٩٠
	١٠٠	١١٠ فأقل	١٠٠

$$\text{ترتيب الربيع الأدنى} = \frac{\text{مجـ ك}}{٤} = \frac{١٠٠}{٤} = ٢٥$$

$$ر_١ = ٧٠ + ١٠ \times \frac{٢٥-٢٠}{٥٥-٢٠}$$

$\therefore$ $ر_١ = ٧١,٤٣$ كيلو

$$\text{ترتيب الربيع الأعلى} = \frac{٣\ \text{مجـ ك}}{٤} = \frac{٣\times١٠٠}{٤} = ٧٥$$

$$ر_٣ = ٩٠ + ١٠ \times \frac{٧٥-٧٠}{٩٠-٧٠}$$

$\therefore$ $ر_٣ = ٩٢,٥$ كيلو

$$\text{نصف المدى الربيعى} = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$$

$$= \frac{٩٢,٥ - ٧١,٤٣}{٢} = ١٠,٥ \text{ كيلو}$$

<u>ب- عن طريق الجدول المتجمع الهابط:</u>

الفئات	التكرارات	فئات متجمعة هابطة	تكرارات متجمعة هابطة
٦٠-	٢٠	٦٠ فأكثر	١٠٠
٧٠-	٣٥	٧٠ فأكثر	٨٠
		$ر_١$ ←	٧٥
٨٠-	١٥	٨٠ فأكثر	٤٥
٩٠-	٢٠	٩٠ فأكثر	٣٠
		$ر_٣$ ←	٢٥
١٠٠-١١٠	١٠	١٠٠ فأكثر	١٠
	١٠٠	أكثر من ١١٠	صفر

$$\text{ترتيب الربيع الأدنى} = \frac{\text{مجـ ك}}{٤} = \frac{١٠٠}{٤} = ٢٥$$

$$ر_٣ = ٩٠ + ١٠ \times \frac{٣٠-٢٥}{٣٠-١٠}$$

$\therefore$ $ر_٣ = ٩٢,٥$ كيلو

$$\text{ترتيب الربيع الأعلى} = \frac{٣\text{ مجـ ك}}{٤} = \frac{٣\times١٠٠}{٤} = ٧٥$$

$$ر_١ = ٧٠ + ١٠ \times \frac{٨٠-٧٥}{٨٠-٤٥}$$

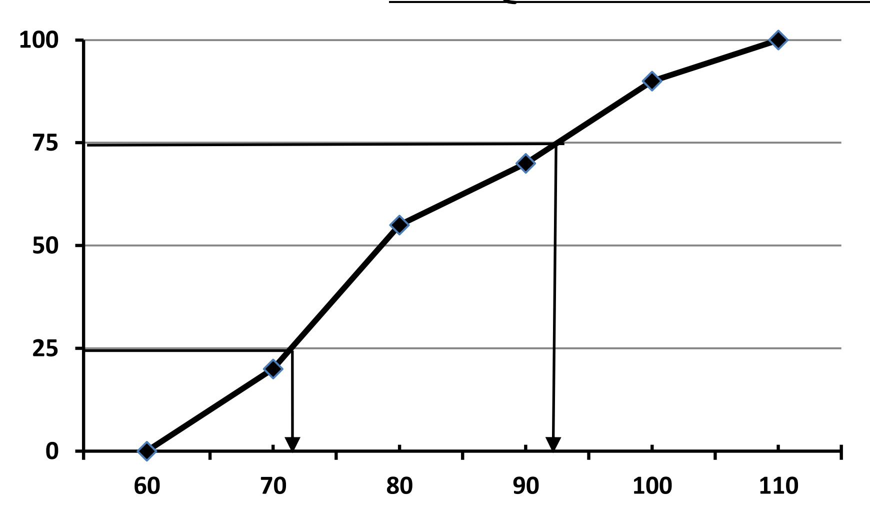
∴ $ر_١$ = ٧١,٤٣ كيلو

$$\text{نصف المدى الربيعى} = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$$

$$= \frac{٩٢,٥ - ٧١,٤٣}{٢} = ١٠,٥ \text{ كيلو}$$

<u>(١) نصف المدى الربيعى بالرسم:</u>

<u>أ – عن طريق الجدول المتجمع الصاعد:</u>



$$\text{ترتيب الربيع الأدنى} = \frac{\text{مجـــك}}{٤} = \frac{١٠٠}{٤} = ٢٥$$

∴ $ر_١$ = ٧١,٤٣ كيلو (تقريباً)

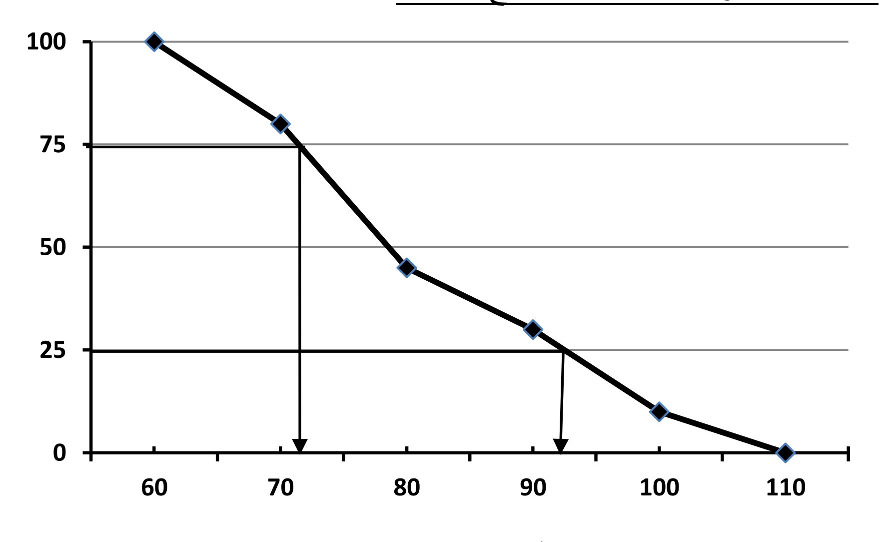
$$\text{ترتيب الربيع الأعلى} = \frac{٣ \text{ مجـــك}}{٤} = \frac{٣ \times ١٠٠}{٤} = ٧٥$$

∴ $ر_٣$ = ٩٢,٥ كيلو (تقريباً)

نصف المدى الربيعى $= \frac{ر_3 - ر_1}{2}$

$= \frac{92,5 - 71,43}{2} = 10,5$ كيلو

<u>ب – عن طريق الجدول المتجمع الهابط:</u>



ترتيب الربيع الأدنى $= \frac{مجـ ك}{4} = \frac{100}{4} = 25$

∴ $ر_3 = 92,5$ كيلو (تقريباً)

ترتيب الربيع الأعلى $= \frac{3 مجـ ك}{4} = \frac{3 \times 100}{4} = 75$

∴ $ر_1 = 71,43$ كيلو (تقريباً)

نصف المدى الربيعى $= \frac{ر_3 - ر_1}{2} = \frac{92,5 - 71,43}{2} = 10,5$ كيلو

الفصل الرابع
معامل الاختلاف والالتواء والعزوم والتفرطح

أولاً: معامل الاختلاف: Coefficient of Variation

هو مقياس للتشتت النسبى حيث يلغى معامل الاختلاف تأثير وحدات القياس ويحول مقياس التشتت المطلق إلى مقياس تشتت نسبى وبالتالى يصلح هذا المقياس للمقارنة بين تشتت التوزيعات المختلفة خاصة التوزيعات المختلفة فى وحدات القياس والمختلفة فى قيمة الوسط الحسابى.

ويمكن فى هذا الصدد أن نحسب نوعين لمعامل الاختلاف يتوقف كل نوع على مقياس التشتت المستخدم وهما:

(١) معامل الاختلاف المعيارى:

هو الأكثر استخداماً وينتج من قسمة الانحراف المعيارى على الوسط الحسابى للتوزيع ويضرب الناتج فى ١٠٠ لتحويله إلى معامل مئوى ويستخدم عند المقارنة بين تشتت التوزيعات المختلفة ، ويتم حسابه كما يلى:

$$\text{معامل الاختلاف المعيارى} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}} \times ١٠٠$$

$$خ_{ع} = \frac{ع}{\bar{س}} \times ١٠٠$$

(٢) معامل الاختلاف الربيعى:

يصلح للتطبيق فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة كما يصلح إذا كان المطلوب إيجاد معامل الاختلاف بالرسم ففى هذه الحالات لا نستطيع حساب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى.

وينتج معامل الاختلاف الربيعى من قسمة نصف المدى الربيعى على الوسط الحسابى للربيعين الذى غالباً ما ينتج الوسيط خاصة فى التوزيعات المتماثلة أو القريبة جداً من التماثل ، ثم يضرب الناتج فى ١٠٠ لتحويله إلى معدل مئوى كما يلى:

$$\text{معامل الاختلاف الربيعى} = \frac{\text{نصف المدى الربيعى}}{\text{الوسط الحسابى للربيعين}} \times ١٠٠$$

$$خ_ر = \left(\frac{ر_٣ - ر_١}{٢} \div \frac{ر_٣ + ر_١}{٢} \right) \times ١٠٠$$

$$خ_ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١} \times ١٠٠$$

مثال (١):

احسب معامل الاختلاف المعيارى لتوزيع تكرارى حيث انحرافه المعيارى ع = ٣٠,٨٩ ووسطه الحسابى $\overline{س}$ = ١٦٧,٣

الحل:

$$خ_ع = \frac{ع}{\overline{س}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣٠,٨٩}{١٦٧,٣} \times ١٠٠$$

∴ $خ_ع$ = ١٨,٥ ٪ تشتت صغير أو منخفض

ملاحظة:

كلما اقترب معامل الاختلاف من الصفر كلما كان التشتت صغيراً وكلما اقترب من ١٠٠٪ كلما كان التشتت عال جداً وكلما اقترب من ٥٠٪ كلما كان التشتت متوسطاً أو معتدلاً.

مثال (٢):

احسب معامل الاختلاف المعيارى لتوزيع تكرارى حيث قيمة الربيع الأدنى $ر_١$ = ٧١,٤٣ وقيمة الربيع الأعلى $ر_٣$ = ٩٢,٥

الحل:

$$خ_ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٩٢,٥ - ٧١,٤٣}{٩٢,٥ + ٧١,٤٣} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢١,٠٧}{١٦٣,٩٣} \times ١٠٠$$

∴ $خ_ر$ = ١٢,٨٥٪ تشتت صغير أو منخفض

مثال (٣):

قارن بين تشتت الأجر فى المصنعين التاليين:

المقاييس / العمال	متوسط الأجور	الانحراف المعيارى
عمال مصنع (أ)	٩٠	٥٥
عمال مصنع (ب)	١٥٠	٧٨

<u>الحل:</u>

$$خ_{ع_١} = \frac{ع_١}{\bar{س}_١} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٥٥}{٩٠} \times ١٠٠$$

$$\therefore خ_{ع_١} = ٦١,١٪$$

$$خ_{ع_٢} = \frac{ع_٢}{\bar{س}_٢} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٧٨}{١٥٠} \times ١٠٠$$

$$\therefore خ_{ع_٢} = ٥٢٪$$

الأجور أكثر تشتتاً فى المصنع (أ) عنها فى المصنع (ب) بالرغم من أن الإنحراف المعيارى فى المصنع (أ) أقل منه فى المصنع (ب) ، إذن لا نستطيع الحكم على التشتت بإستخدام الإنحراف المعيارى بمفرده لأنه مقياس مطلق.

ثانياً: معامل الإلتواء: Measures of Skewness

مقاييس الإلتواء تحدد شكل المنحنى فى التوزيعات التكرارية المختلفة ، فقد يتساوى متوسطان لتوزيعين كما يتساوى مقياسان للتشتت لتوزيعين آخريين ولكن يختلف شكل المنحنى فى كلا التوزيعين ، ويمكن دون الحاجة للرسم البيانى قياس الإلتواء للحكم على المنحنى سواء كان متماثلاً أو ملتوياً.

باستخدام العلاقة السابقة الواردة فى الباب الثانى من هذا الكتاب بين المتوسطات الثلاث: الوسط الحسابى والوسيط والمنوال وهى:

$$(\bar{س} - م) = ٣ (\bar{س} - ر_{٢})$$

ويعتبر كل طرف من طرفى المعادلة السابقة على حدة مقياساً للإلتواء.

∴ مقاييس الإلتواء هى:

مقياس الإلتواء الأول = $(\bar{س} - م)$

مقياس الإلتواء الثانى = $٣ (\bar{س} - ر_{٢})$

ويلاحظ على هذه المقاييس ما يلى:

١. تعتبر مقاييس مطلقة تأخذ نفس وحدة قياس المتغير الأصلى ولا تصلح للمقارنة بين إلتواء التوزيعات المختلفة.
٢. إذا كان مقياس الإلتواء = صفر كان منحنى التوزيع متماثلاً.
٣. إذا كان مقياس الإلتواء = كمية موجبة كان منحنى التوزيع ملتوى يميناً أو له ذيل جهة اليمين.
٤. إذا كان مقياس الإلتواء = كمية سالبة كان منحنى التوزيع ملتوى يساراً أو له ذيل جهة اليسار.

٥. كلما زاد مقياس الإلتواء الموجب أو السالب كلما كان المنحنى أكثر إلتواءاً والعكس صحيح.

معاملات الإلتواء:

(١) معامل إلتواء بيرسون المعيارى (Pearson)

يمكن تحويل مقاييس الإلتواء المطلقة السابقة إلى معاملات إلتواء وذلك للتخلص من تأثير وحدات القياس ، وتستخدم هذه المعاملات فى المقارنة بين إلتواء التوزيعات المختلفة ، ويحسب معامل الإلتواء المعيارى بقسمة مقياس الإلتواء السابق على الإنحراف المعيارى.

فإذا رمزنا لمعامل الإلتواء بالرمز (ت) فإن:

$$ت_{ع} = \frac{\bar{س} - م}{ع}$$

$$ت_{ع} = \frac{٣\left(\bar{س} - ر_{٢}\right)}{ع}$$

وتتراوح قيمة معاملات الإلتواء دائماً بين القراءتين –٣ ، +٣

وغالباً ما يكون هناك فروق بسيطة بين المعاملين السابقين لأن العلاقة بين المتوسطات الثلاث كما سبق أن ذكرنا علاقة تقريبية ولكن النتائج النهائية دائماً ما تكون فى نفس الاتجاه. ويلاحظ أن معاملات الإلتواء السابقة لا يمكن حسابها من الجداول المفتوحة لأنها تعتمد على الوسط الحسابى والإنحراف المعيارى ، كما لا يمكن حسابها بالرسم.

(٢) معامل إلتواء بولى الربيعى (Bowley)

هذا المعامل يعتمد فى حسابه على الربيعين والوسيط ولذلك يمكن حسابه بالرسم بالإضافة للحساب ، كما يصلح للجداول التكرارية المفتوحة ، ويحسب مقياس الإلتواء بالعلاقة التالية:

مقياس الإلتواء = $(ر_٣ - ر_٢) - (ر_٢ - ر_١)$

وإذا نسبنا مقياس الإلتواء السابق لمقياس التشتت المناظر وهو نصف المدى الربيعى $\frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$ لحصلنا على معامل الإلتواء المطلوب ولكن فضل الإحصائيون نسبة مقياس الإلتواء السابق لضعف نصف المدى الربيعى أى للقيمة $(ر_٣ - ر_١)$ بحيث يصبح معامل الإلتواء كما يلى:

$$ت_ر = \frac{\left(ر_٣ - ر_٢\right) - \left(ر_٢ - ر_١\right)}{\left(ر_٣ - ر_١\right)}$$

وهذا المقياس قيمته تنحصر دائماً بين −١ ، +١

ونفس النتائج السابقة التى توصلنا إليها وهى:

١. إذا كان معامل الإلتواء = صفر كان التوزيع متماثلاً أى أن الوسيط يقع فى منتصف المسافة بين الربيعين الأدنى والأعلى
٢. إذا كان معامل الإلتواء = كمية موجبة كان الإلتواء جهة اليمين.
٣. إذا كان معامل الإلتواء = كمية سالبة كان الإلتواء جهة اليسار.

مثال (١):

فى أحد التوزيعات التكرارية تم حساب المقاييس التالية:

$\overline{س} = ٢٠$ ، $ر_٢ = ١٦,٩$ ، م = ١١ ، $ع^٢ = ٢٥$

الحل:

$$ت_{ع_١} = \frac{\overline{س} - م}{ع}$$

$$= \frac{٢٠ - ١١}{٥} = + ١,٨$$ إلتواء موجب يميناً

حل آخر:

$$ت_{ع_٢} = \frac{٣\left(\overline{س} - ر_٢\right)}{ع}$$

$$= \frac{٣\left(٢٠ - ١٦,٩\right)}{٥} = + ١,٨٦$$ إلتواء موجب يميناً

مثال (٢):

فى أحد التوزيعات التكرارية تم حساب المقاييس التالية:

$ر_١ = ٢٠$ ، $ر_٢ = ٣٠$ ، $ر_٣ = ٣٨$

حدد شكل المنحنى عن طريق حساب معامل إلتواء بولى الربيعى

الحل:

$$ت_ر = \frac{(ر_٣ - ر_٢) - (ر_٢ - ر_١)}{(ر_٣ - ر_١)}$$

$$= \frac{(٣٨-٣٠) - (٣٠-٢٠)}{(٣٨-٢٠)}$$

= − ٠,١١ إلتواء سالب يساراً

مثال (٣):

قارن بين إلتواء التوزيعين التاليين:

المقياس / التوزيع	$\overline{س}$	م	ر٢	ع
التوزيع الأول	٣٥	٥٠	٤٠	١٥
التوزيع الثانى	٦٠	٣٩	٥٣	١٠

الحل:

$$ت_{ع_١} = \frac{\overline{س} - م}{ع}$$

$$= \frac{٣٥-٥٠}{١٥}$$ = − ١ **إلتواء سالب جهة اليسار (حاد)**

$$ت_{ع_٢} = \frac{\overline{س} - م}{ع}$$

$$= \frac{٦٠-٣٩}{١٠}$$ = ٢,١ إلتواء موجب جهة اليمين

يتضح أن التوزيع الأول أكثر إلتواءاً من التوزيع الثانى واختلاف اتجاه ذيل المنحنى فى التوزيعين.

ثالثاً: العزوم: Moments

يمكن عن طريق العزوم معرفة أهم الخصائص المميزة للتوزيع التكرارى حيث تستخدم نتائج العزوم فى حساب عدة مقاييس هامة للنزعة المركزية والتشتت ، كما تستخدم العزوم فى قياس الإلتواء والتفرطح ، ولا يمكن حساب العزوم فى حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

ويتم حساب العزوم بطريقتين مختلفتين:

(١) العزوم حول الصفر The Moments About Zero

العزوم حول الصفر عبارة عن متوسط الإنحرافات بين القيم المختلفة للمتغير س والصفر ومربعات ومكعبات والأس الرابع لمتوسط هذه الإنحرافات ولكل منهما دلالته الإحصائية المختلفة.

وتتأثر العزوم حول الصفر بالعمليات الحسابية الأربع (الجمع والطرح والضرب والقسمة) فإذا استخدمت للتبسيط تعالج فى الناتج النهائى ، وإذا رمزنا للعزوم بالرمز ($م_ر$) حيث ر تأخذ إحدى القيم ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ فإن:

(أ) البيانات غير المبوبة:

- العزم الأول حول الصفر:

$$م_١ = \frac{مجـ (س - ٠)^١}{ن}$$

$$= \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$ ويعادل العزم فى هذه الحالة الوسط الحسابى $\overline{\text{س}}$

$\therefore$ $\text{مـ}_{١} = \overline{\text{س}}$

- <u>العزم الثانى حول الصفر:</u>

$$\text{مـ}_{٢} = \frac{\text{مجـ}\left(\text{س} - ٠\right)^{٢}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}}$$

ويستخدم العزم الثانى فى حساب التباين والإنحراف المعيارى ومعامل الإختلاف المعيارى كما يلى:

$$\text{ع}^{٢} = \text{مـ}_{٢} - \text{مـ}_{١}^{٢}$$

$$\text{، ع} = \sqrt{\text{مـ}_{٢} - \text{مـ}_{١}^{٢}}$$

$$\text{خ}_{\text{ع}} = \frac{\sqrt{\text{مـ}_{٢} - \text{مـ}_{١}^{٢}}}{\text{مـ}_{١}} \times ١٠٠$$

- <u>العزم الثالث حول الصفر:</u>

$$\text{مـ}_{٣} = \frac{\text{مجـ}\left(\text{س} - ٠\right)^{٣}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{مجـ} س^{٣}}{ن}$$

ويستخدم فى حساب الإلتواء

- <u>العزم الرابع حول الصفر:</u>

$$م_{٤} = \frac{\text{مجـ} (س - ٠)^{٤}}{ن}$$

$$= \frac{\text{مجـ} س^{٤}}{ن}$$

ويستخدم فى حساب التفرطح

<u>(ب) البيانات المبوبة:</u>

العزوم حول الصفر عبارة عن متوسط إنحرافات القيم المختلفة للمتغير س عن الصفر ومتوسط مربعاتها ومكعباتها والأس الرابع لها ، كلٌ منهم مرجحاً يالتكرارات.

- <u>العزم الأول حول الصفر:</u>

$$م_{١} = \frac{\text{مجـ} ك س}{\text{مجـ} ك}$$ وهو يعادل الوسط الحسابى $\overline{س}$

- <u>العزم الثانى حول الصفر:</u>

$$م_٢ = \frac{مجـ ك س^٢}{مجـ ك}$$ ويستخدم فى حساب التباين والإنحراف المعيارى ومعامل الإختلاف المعيارى

- <u>العزم الثالث حول الصفر:</u>

$$م_٣ = \frac{مجـ ك س^٣}{مجـ ك}$$ ويستخدم فى حساب الإلتواء

- <u>العزم الرابع حول الصفر:</u>

$$م_٤ = \frac{مجـ ك س^٤}{مجـ ك}$$ ويستخدم فى حساب التفرطح

<u>مثال (١):</u>

احسب العزوم الأربعة الأولى حول الصفر للقيم التالية:

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

<u>الحل:</u>

$$م_١ = \frac{مجـ س}{ن}$$

$$= \frac{١+٢+٣+٤}{٤} = ٢,٥$$

$$م_٢ = \frac{\text{مجـ}\ س^٢}{ن}$$

$$= \frac{١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢}{٤} = ٧,٥$$

$$م_٣ = \frac{\text{مجـ}\ س^٣}{ن}$$

$$= \frac{١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + ٤^٣}{٤} = ٢٥$$

$$م_٤ = \frac{\text{مجـ}\ س^٤}{ن}$$

$$= \frac{١^٤ + ٢^٤ + ٣^٤ + ٤^٤}{٤} = ٨٨,٥$$

مثال (٢):

احسب العزوم الأربعة الأولى حول الصفر للتوزيع التكرارى التالى:

ف	٢-	٤-	٦-	٨-١٠
ك	٢	٤	٣	١

الحل:

ف	ك	س	ك س	ك $س^{٢}$	ك $س^{٣}$	ك $س^{٤}$
٢–	٢	٣	٦	١٨	٥٤	١٦٢
٤–	٤	٥	٢٠	١٠٠	٥٠٠	٢٥٠٠
٦–	٣	٧	٢١	١٤٧	١٠٢٩	٧٢٠٣
٨–١٠	١	٩	٩	٨١	٧٢٩	٦٥٦١
	١٠ مجـ ك		٥٦ مجـ ك س	٣٤٦ مجـ ك $س^{٢}$	٢٣١٢ مجـ ك $س^{٣}$	١٦٤٢٦ مجـ ك $س^{٤}$

$$م_{١} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{٥٦}{١٠} = ٥,٦$$

$$م_{٢} = \frac{\text{مجـ ك } س^{٢}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{٣٤٦}{١٠} = ٣٤,٦$$

$$م_{٣} = \frac{\text{مجـ ك } س^{٣}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{٢٣١٢}{١٠} = ٢٣١,٢$$

$$م_{٤} = \frac{\text{مجـ ك } س^{٤}}{\text{مجـ ك}}$$

$$= \frac{١٦٤٢٦}{١٠} = ١٦٤٢,٦$$

(٢) العزوم حول الوسط الحسابى The Moments About Mean

(أ) البيانات غير المبوبة:

العزوم حول الوسط الحسابى عبارة عن متوسط إنحرافات القيم عن الوسط الحسابى ومتوسط إنحرافات مربعاتها ومكعباتها والأس الرابع لها.

- العزم الأول حول الوسط الحسابى:

$$م_{١} = \frac{مجـ (س - \overline{س})}{ن} = صفر \quad دائماً$$

لأن مجموع الإنحرافات أو الفروق حول الوسط لحسابى يساوى صفر

- العزم الثانى حول الوسط الحسابى:

$$م_{٢} = \frac{مجـ (س - \overline{س})^{٢}}{ن}$$

وهو التباين ويمكن منه حساب الإنحراف المعيارى

$$\therefore \quad ع^{٢} = م_{٢} \qquad ، \quad ع = \sqrt{م_{٢}}$$

- العزم الثالث حول الوسط الحسابى:

$$م_{٣} = \frac{مجـ (س - \overline{س})^{٣}}{ن}$$ ويستخدم فى حساب الإلتواء

- العزم الرابع حول الوسط الحسابى:

$$م_{٤} = \frac{مجـ (س - \overline{س})^{٤}}{ن}$$ ويستخدم فى حساب التفرطح

(ب) البيانات المبوبة:

العزوم حول الوسط الحسابى عبارة عن متوسط إنحرافات القيم عن الوسط الحسابى ومتوسط إنحرافات مربعاتها ومكعباتها والأس الرابع لها كل مرجحاً بالتكرارات.

- العزم الأول حول الوسط الحسابى:

$$م_{١} = \frac{مجـ ك(س - \overline{س})}{مجـ ك} = صفر \quad دائماً$$

- العزم الثانى حول الوسط الحسابى:

$$م_{٢} = \frac{مجـ ك(س - \overline{س})^{٢}}{مجـ ك} \qquad وهو \ التباين \ ع^{٢}$$

- العزم الثالث حول الوسط الحسابى:

$$م_{٣} = \frac{مجـ ك(س - \overline{س})^{٣}}{مجـ ك} \qquad ويحسب \ منه \ الإلتواء$$

- العزم الرابع حول الوسط الحسابى:

$$م_{٤} = \frac{مجـ ك(س - \overline{س})^{٤}}{مجـ ك} \qquad ويحسب \ منه \ التفرطح$$

ولا تتأثر العزوم حول الوسط الحسابى بالجمع والطرح ، فإذا استخدمت فى التبسيط لا يتم معالجتها فى النتيجة النهائية ولكنها تتأثر بعمليات الضرب والقسمة وبالتالى إذا استخدمت عمليات الضرب أو القسمة فى التبسيط لابد أن تعالج فى النتيجة النهائية.

مثال (١):

احسب العزوم المختلفة للقيم التالية حول وسطها الحسابى:

٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

الحل:

$$\bar{س} = \frac{٣+٤+٥+٦}{٤} = ٤,٥$$

س	$(س - \bar{س})$	$(س - \bar{س})^٢$	$(س - \bar{س})^٣$	$(س - \bar{س})^٤$
٣	١,٥-	٢,٢٥	٣,٣٧٥-	٥,٠٦٢٥
٤	٠,٥-	٠,٢٥	٠,١٢٥-	٠,٠٦٢٥
٥	٠,٥+	٠,٢٥	٠,١٢٥+	٠,٠٦٢٥
٦	١,٥+	٢,٢٥	٣,٣٧٥+	٥,٠٦٢٥
	صفر مجـ $(س - \bar{س})$	٥ مجـ $(س - \bar{س})^٢$	صفر مجـ $(س - \bar{س})^٣$	١٠,٢٥ مجـ $(س - \bar{س})^٤$

$م_١$ = صفر

$$م_٢ = \frac{مجـ (س - \bar{س})^٢}{ن} = \frac{٥}{٤} = ١,٢٥$$

$م_٣$ = صفر

$$م_٤ = \frac{مجـ (س - \bar{س})^٤}{ن} = \frac{١٠,٢٥}{٤} = ٢,٥٦$$

مثال (٢):

احسب العزوم المختلفة حول الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى التالى:

ف	٤−	٦−	٨−	١٠−١٢
ك	١	٢	٤	٣

الحل:

ف	ك	س	ك س	$(س - \overline{س})$	ك$(س - \overline{س})$	ك$(س - \overline{س})^{2}$	ك$(س - \overline{س})^{3}$	ك$(س - \overline{س})^{4}$
٤−	١	٥	٥	−٣,٨	−٣,٨	١٤,٤٤	−٥٤,٨٧٢	٢٠٨,٥١٣٦
٦−	٢	٧	١٤	−١,٨	−٣,٦	٦,٤٨	−١١,٦٦٤	٢٠,٩٩٥٢
٨−	٤	٩	٣٦	٠,٢	٠,٨	٠,١٦	٠,٠٣٢	٠,٠٠٦٤
١٠−١٢	٣	١١	٣٣	٢,٢	٦,٦	١٤,٥٢	٣١,٩٤٤	٧٠,٢٧٦٨
	١٠		٨٨		صفر	٣٥,٦	−٥٦,٥٦	٢٩٩,٧٩٢
			مج ك س		مج ك $(س - \overline{س})$	مج ك $(س - \overline{س})^{2}$	مج ك $(س - \overline{س})^{3}$	مج ك $(س - \overline{س})^{4}$

$$\therefore \overline{س} = \frac{\text{مجك س}}{\text{مجك}} = \frac{٨٨}{١٠} = ٨,٨$$

$$م_{١} = \text{صفر}$$

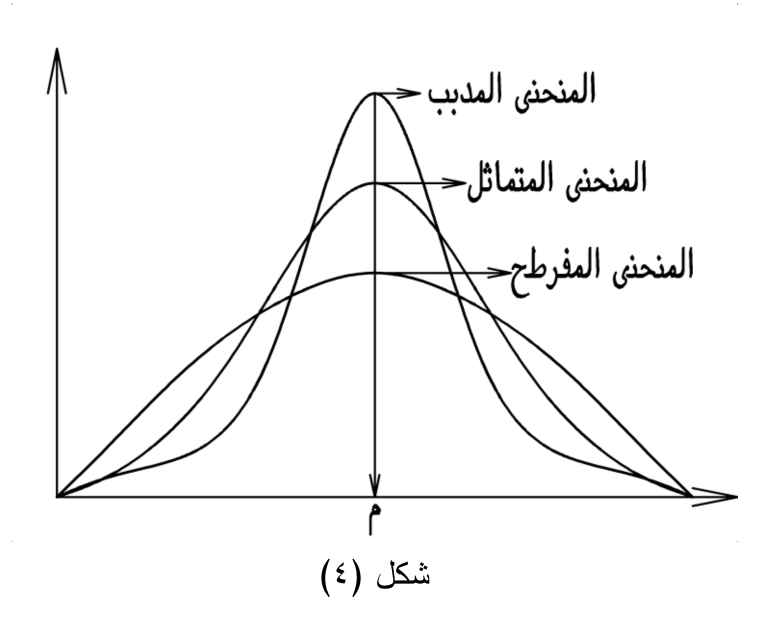
$$م_{٢} = \frac{\text{مجك}\,(س - \overline{س})^{٢}}{\text{مجك}} = \frac{٣٥,٦}{١٠} = ٣,٥٦$$

$$م_{٣} = \frac{\text{مجك}\,(س - \overline{س})^{٣}}{\text{مجك}} = \frac{-٣٤,٥٦}{١٠} = -\ ٣,٤٥٦$$

$$م_٤ = \frac{مجـ ك \left(س - \overline{س}\right)^{٤}}{مجـ ك} = \frac{٢٩٩,٧٩٢}{١٠} = ٢٩,٩٧٩٢$$

رابعاً: التفرطح: Curtosis

مقاييس التفرطح عبارة عن مقاييس تصف أو تتعرف على قمة المنحنى فى التوزيعات التكرارية ذات القمة الواحدة ، وعادةً تتم مقارنة أى منحنى بالمنحنى المتماثل أو الطبيعى أو المعتدل حيث يطلق على المنحنى المتماثل إصطلاح منحنى متوسط أو معتدل التفرطح ، أما المنحنى الذى يضيق حول الوسط الحسابى للتوزيع وترتفع قمته عن قمة المنحنى المتماثل يسمى منحنى مدبباً Leptokurtic ، والمنحنى الذى يتسع حول الوسط الحسابى وتنخفض قمته عن قمة المنحنى المتماثل يسمى منحنى مفرطحاً Platykurtic ، ويمكن توضيح الأشكال الثلاثة السابقة على الرسم البيانى التالى:



شكل (٤)

وإذا رمزنا لمعامل التفرطح بالرمز (ح) حيث يعتمد معامل التفرطح فى حسابه على العزم الرابع حول الوسط الحسابى مع العزم الثانى حول الوسط الحسابى ويتم حساب معامل التفرطح من العلاقة التالية:

$$\text{معامل التفرطح} = \frac{\text{العزم الرابع}}{\text{مربع العزم الثانى}}$$

$$ح = \frac{م_٤}{م_٢^٢}$$

ثم يقارن ناتج المعامل السابق بالرقم الصحيح ٣ مع مراعاة الآتى:

١. إذا كان معامل التفرطح ح = ٣ كان التوزيع متماثلاً ومعتدل التفرطح
٢. إذا كان معامل التفرطح ح > ٣ كان التوزيع مدبباً
٣. إذا كان معامل التفرطح ح < ٣ كان التوزيع مفرطحاً

مثال:

احسب معامل التفرطح فى المثال السابق حيث كانت النتائج كما يلى:

$م_٢ = ٣,٥٦$ ، $م_٤ = ٢٩,٩٧٩٢$

واستخدم الناتج فى الحكم على شكل المنحنى

الحل:

$$ح = \frac{م_٤}{م_٢^٢}$$

$$= \frac{٢٩,٩٧٩٢}{(٣,٥٦)^{٢}} = \frac{٢٩,٩٧٩٢}{١٢,٦٧٣٦} = ٢,٣٦٥ < ٣$$

∴ منحنى التوزيع السابق يعتبر منحنى مفرطحاً

تمارين على الباب الثالث

١. قارن بين خصائص مقاييس التشتت التالية:

الإنحراف المتوسط – الإنحراف المعيارى – المدى – نصف المدى الربيعى

٢. إذا كان لدينا درجات نجاح عدد ١٠ طلبة من طلاب كلية التجارة جامعة القاهرة فى مادة الإحصاء هى:

١٥ ، ١٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٣ ، ١٢ ، ١٥

المطلوب:

أ – حساب الإنحراف المتوسط

ب– حساب التباين والإنحراف المعيارى

جـ – حساب المدى ونصف المدى الربيعى

٣. إذا كان لدينا درجات عدد ١٠ طلبة من طلاب كلية التجارة جامعة القاهرة فى مادتى الإحصاء والتأمين هى:

	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإحصاء	١٢	١٨	١٤	٨	١١	١٦	٦	١٠	١٤	١٧
التأمين	١٣	١٥	١٧	١٠	١٣	١٤	١٠	٥	١١	١٣

المطلوب:

أ – قارن بين تشتت درجات المادتين باستخدام كل من معامل الاختلاف المعيارى ومعامل الاختلاف الربيعى.

ب– قارن بين إلتواء التوزيعين السابقين.

٤.

فئات الدخل	أقل من ٥٠	٥٠-	١٠٠-	١٨٠-	٢٥٠-	٣٠٠ فأكثر
عدد العاملين	١٥	٢٥	٣٥	٣٠	١٠	٥

المطلوب:

أ – حساب مقياس تشتت مطلق ونسبى مناسب للتوزيع السابق.

ب– قياس مدى إلتواء توزيع الدخل السابق.

٥.

فئات الوزن	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	١٠٠-	١١٠-١٢٠
عدد الطلبة	٢٠	٤٥	٦٠	٣٠	١٥	١٧	٣

المطلوب:

أ – حساب التباين والإنحراف المعيارى ومعامل الإختلاف المعيارى.

ب– قياس مدى إلتواء توزيع المنحنى السابق.

٦.

فئات الأجر	٨٠-	١٠٠-	١٥٠-	٢٠٠-	٢٥٠-	٢٨٠-	٣٥٠-٥٠٠
عمال مصنع (أ)	٢٠	٤٥	٨٥	٦٥	٣٠	٢٠	١٥
عمال مصنع (ب)	٣٠	٣٥	٧٥	٤٥	٣٥	١٥	٥

المطلوب:

أ – قارن بين تشتت الأجر فى المصنعين.

ب– قارن بين إلتواء التوزيعين.

٧.

فئات	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-٣٠
تكرارت	٤	٦	٥	٣	٢

المطلوب:

أ - احسب العزوم الأربعة الأولى حول الوسط الحسابى.

ب- احسب معامل الإختلاف المعيارى بإستخدام العزوم السابقة.

جـ - قياس مدى تفرطح المنحنى السابق.

٨. الفئات ٣٠- ٣٨- ٤٦- ٥٤- ٦٢-٧٠

التكرارت ٢٠ ٢٥ ٣٠ ١٥ ١٠

المطلوب:

ارسم المنحنى المتجمع الهابط واستنتج منه معامل الاختلاف الربيعى ومعامل بولى للإلتواء الربيعى

٩. الفئات ١٠٠- ١٢٠- ١٤٠- ١٦٠- ١٨٠- ٢٠٠- ٢٢٠-٢٤٠

التكرارات ١٠ ١٥ ٢٠ ٣٥ ٢٥ ١٠ ٥

المطلوب:

أ - حساب الإنحراف المتوسط

ب- حساب العزوم الأربعة حول الصفر

جـ -قياس مدى تفرطح المنحنى باستخدام العزوم حول الوسط الحسابى

د - قياس التشتت المطلق والنسبى بالحساب

هـ - حساب إلتواء بيرسون

الباب الرابع
الإرتباط والإنحدار
Correlation and Regression

الفصل الأول: الإرتباط الخطى البسيط

الفصل الثاني: الإنحدار الخطى البسيط

مقدمة:

ننتقل من دراسة ظاهرة واحدة أو متغير واحد إلى دراسة ظاهرتين أو متغيرين لتحديد العلاقة أو الإرتباط بينهما وإذا كان هناك علاقة أو ارتباط فما نوعها أوإتجاهها وشدتها ويتم ذلك من خلال دراسة موضوع الإرتباط وإذا كان أحد المتغيرين يؤثر فى المتغير الآخر أو بينهما عامل مشترك يتأثران به معاً ويتم تحديد هذه العلاقة السببية أو الموضوعية بين المتغيرين من خلال دراسة موضوع الإنحدار واستخدام العلاقات الإنحدارية بين المتغيرين فى التنبؤ مستقبلاً بقيمة أحد المتغيرين بدلالة أى قيمة معطاه للمتغير الآخر.

وستركز دراستنا فى هذا الباب على العلاقة الخطية أو المستقيمة بين المتغيرين (س ، ص) من خلال الفصول التالية:

الفصل الأول: الإرتباط الخطى البسيط

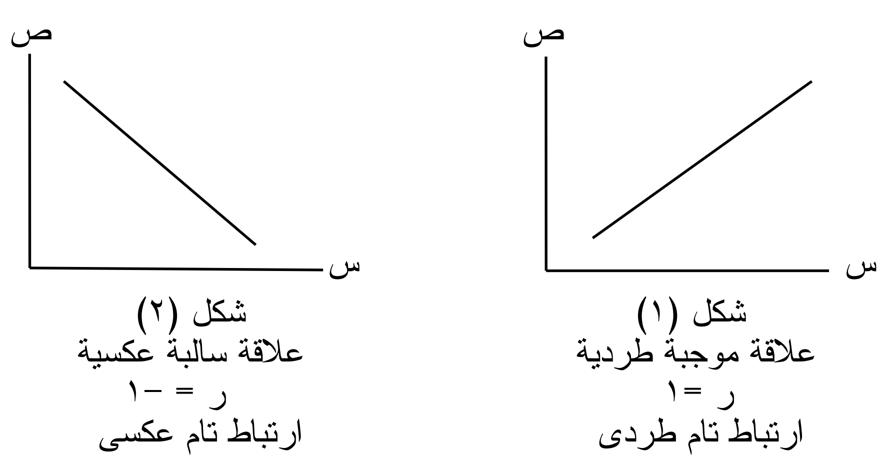
الفصل الثاني: الإنحدار الخطى البسيط

الفصل الأول
الارتباط الخطى البسيط
Simple Linear Correlation

مقدمة:

عند قياس العلاقة أو الإرتباط بين متغيرين مثل العلاقة بين الدخل والإستهلاك فمنطقى أنه كلما زاد الدخل زاد الإستهلاك والعكس صحيح أى أن العلاقة بين الدخل والإستهلاك هى علاقة طردية (فى إتجاه واحد) كما إن العلاقة بين الإستهلاك والإدخار حتماً ستكون علاقة عكسية (فى إتجاهين مختلفين) ، وقد لا يكون هناك أى علاقة أو إرتباط بين المتغيرين مثل العلاقة بين طول شخص ودرجاته فى إمتحان معين ولذلك يكون الإرتباط فى هذه الحالة منعدم ، وقياس الإرتباط بين متغيرين لا يحدد العلاقة السببية بينهما بمعنى تحديد أى المتغيرين متغير مستقل وأيهما متغير تابع ولكن تحدد العلاقة السببية بينهما عن طريق المعادلات الإنحدارية.

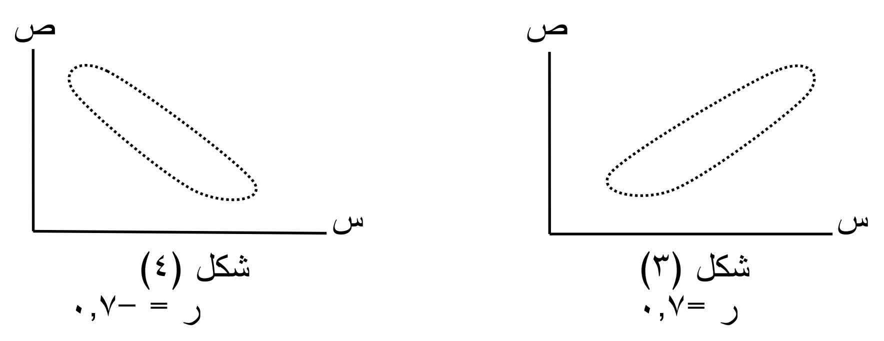
ويمكن تحديد بعض الأشكال الإنتشارية للمتغيرين س ، ص فيما يلى:



شكل (١)
علاقة موجبة طردية
ر =١
ارتباط تام طردى

شكل (٢)
علاقة سالبة عكسية
ر = –١
ارتباط تام عكسى

ويتضح من الشكلين السابقين أن جميع النقط التى تمثل العلاقة بين المتغيرين س ، ص تقع على خط مستقيم لذلك يعتبر الإرتباط تام بين المتغيرين ، ولكن كلما بعدت النقط عن الخط المستقيم كلما تناقص معامل الإرتباط عن ± ١ ويتضح ذلك من الشكلين التاليين:

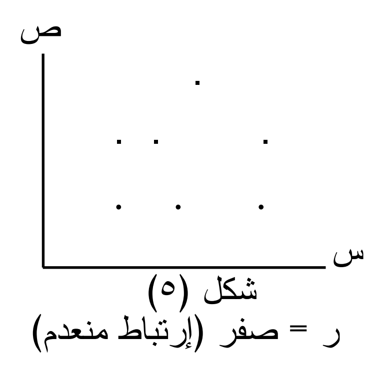


شكل (٣)
ر =٠,٧

شكل (٤)
ر = -٠,٧

وقد تتفق عدة علاقات بين المتغيرين س ، ص فى قيمة معامل الإرتباط ولكن تختلف الخطوط المستقيمة التى تمثل كل علاقة على حدة بمعنى أن معدل التغير فى ص بالنسبة لـــ س أو فى س بالنسبة لـــ ص يختلف من خط لآخر ، وسوف يتحدد معدل التغير على أساس العلاقة الإنحدارية بين المتغيرين وهو ما سوف ندرسه فى الفصل التالى.

وإذا كانت العلاقة بين س ، ص لا يحددها شكل معين ولا تخضع لقانون أو نظام تنعدم العلاقة أو الإرتباط بين المتغيرين كما يتضح من الشكل الإنتشارى التالى:



شكل (٥)
ر = صفر (إرتباط منعدم)

أيضاً فإن العلاقة بين متغير وثابت تنعدم ، بمعنى أن معامل الإرتباط بين متغير وثابت = صفر.

وإذا استبدلنا س بــ ص ، أو ص بــ س فإن قيمة معامل الإرتباط لا تتغير ولذلك لا يمكن عن طريق قياس معامل الإرتباط تحديد العلاقة السببية بين المتغيرين س ، ص بمعنى أننا لا نستطيع أن نحدد أيهما المتغير المستقل وأيهما المتغير التابع ولكن يتم ذلك عن طريق العلاقة الإنحدارية بين المتغيرين.

ويمكننا تحليل نتائج معامل الإرتباط فى الإطار التالى:

١. إذا كان قيمة معامل الإرتباط = + ١ يطلق على هذه الحالة إرتباط تام طردى.
٢. إذا كان قيمة معامل الإرتباط = (كسر موجب) يطلق على هذه الحالة علاقة طردية بين المتغيرين س ، ص تزداد كلما إقتربنا من الواحد الصحيح وتقل كلما إقتربنا من الصفر.
٣. إذا كان قيمة معامل الإرتباط = -١ يطلق على هذه الحالة إرتباط تام عكسى.
٤. إذا كان قيمة معامل الإرتباط = (كسر سالب) يطلق على هذه الحالة علاقة عكسية بين المتغيرين س ، ص تزداد كلما إقتربنا من (-١) وتقل كلما إقتربنا من الصفر.
٥. إذا كان قيمة معامل الإرتباط = صفر يطلق على هذه الحالة ارتباط منعدم بمعنى أنه لا توجد أى علاقة أو ارتباط بين المتغيرين س ، ص.

إذن قيمة معامل الإرتباط تتراوح بين -١ ، +١ أى أن -١ $\leq$ ر $\leq$ +١

أولاً: معامل إرتباط بيرسون Pearson Correlation Coefficient

معامل إرتباط بيرسون يعطى نتائج جيدة إذا كانت ن >٣٠ مفردة أما إذا كانت ن أقل من ٣٠ مفردة يعطى معامل إرتباط بيرسون نتائج غير دقيقة ولذلك يفضل استخدام معامل إرتباط آخر يعطى نتائج أكثر دقة فى حالة العينات الصغيرة مثل معامل إرتباط سبيرمان والذى سنتعرض له بالدراسة فيما بعد.

(١) حالة البيانات غير المبوبة:

بفرض أن المتغير س يمكن أن يأخذ القيم التالية:

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، .... $س_{ن}$ بمتوسط حسابى $\bar{س}$ وإنحراف معيارى $ع_{س}$ وبفرض أن المتغير ص يمكن أن يأخذ أحد القيم التالية:

$ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$ ، .... $ص_{ن}$ بمتوسط حسابى $\bar{ص}$ وإنحراف معيارى $ع_{ص}$

وللوصول لمعامل الإرتباط نقوم أولاً بحساب الإنحرافات المطلقة بين القيم الأصلية لكل متغير والوسط الحسابى لنفس المتغير ثم نقوم بتحويل الإنحرافات المطلقة لكل متغير إلى قيم أو وحدات معيارية لإلغاء تأثير إختلاف وحدات القياس بين المتغيرين س ، ص وتتحدد الإنحرافات مقومة بالقيم المعيارية لكل متغير على التوالى كما يلى:

$$\frac{س_{١} - \bar{س}}{ع_{س}} \text{ ، } \frac{س_{٢} - \bar{س}}{ع_{س}} \text{ ، } \frac{س_{٣} - \bar{س}}{ع_{س}} \text{ ، .... ، } \frac{س_{ن} - \bar{س}}{ع_{س}}$$

$$\frac{ص_١ - \overline{ص}}{ع_ص} ، \frac{ص_٢ - \overline{ص}}{ع_ص} ، \frac{ص_٣ - \overline{ص}}{ع_ص} ، .... ، \frac{ص_ن - \overline{ص}}{ع_ص}$$

ويقاس الإرتباط عن طريق متوسط مجموع حاصل ضرب الإنحرافات مقومة بالقيم المعيارية للمتغيرين س ، ص وإذا رمزنا لمعامل الإرتباط بالرمز (ر) فإن:

$$ر = \frac{١}{ن} \left(\frac{س - \overline{س}}{ع_س}\right) \left(\frac{ص - \overline{ص}}{ع_ص}\right)$$

حيث ن تمثل عدد قيم س ، ص معاً مأخوذ مثنى مثنى

$$ر = \frac{\frac{١}{ن} مجـ (س - \overline{س}) (ص - \overline{ص})}{\sqrt{ع_س^٢ \times ع_ص^٢}}$$

$$= \frac{\frac{١}{ن} مجـ (س - \overline{س}) (ص - \overline{ص})}{\sqrt{\frac{١}{ن} مجـ (س - \overline{س})^٢ \times \frac{١}{ن} مجـ (ص - \overline{ص})^٢}}$$

$$= \frac{مجـ (س - \overline{س}) (ص - \overline{ص})}{\sqrt{مجـ (س - \overline{س})^٢ \times مجـ (ص - \overline{ص})^٢}}$$

وبتبسيط العلاقات السابقة يمكن استخدام أحد المعادلات التالية لحساب معامل الإرتباط:

$$ر = \frac{مجـ\ س\ ص - ن\ \bar{س}\ \bar{ص}}{\sqrt{\left(مجـ\ س^{٢} - ن\ \bar{س}^{٢}\right) \times \left(مجـ\ ص^{٢} - ن\ \bar{ص}^{٢}\right)}}$$

$$ر = \frac{ن \times مجـ\ س\ ص - مجـ\ س \times مجـ\ ص}{\sqrt{\left\{ن\ مجـ\ س^{٢} - (مجـ\ س)^{٢}\right\}\left\{ن\ مجـ\ ص^{٢} - (مجـ\ ص)^{٢}\right\}}}$$

ويلاحظ على القوانين السابقة أن الجذر التربيعى فى المقام دائماً كمية موجبة أكبر من الصفر أما البسط إذا كان التغير فى قيم س فى نفس إتجاه التغير فى قيم ص كانت إشارة الإنحرافات أو القيم المعيارية للمتغيرين س ، ص موجبة وبالتالى يكون معامل الإرتباط موجب (طردى) ، أما إذا كان التغير فى قيم س عكس التغير فى قيم ص (فى إتجاهين متضادين) كانت إشارة الإنحرافات أو القيم المعيارية مختلفة وبالتالى يكون حاصل ضربهما كمية سالبة ويكون معامل الإرتباط سالب (عكسى).

<u>التغاير Co-Variance</u>

يطلق على بسط معامل الإرتباط اصطلاح التغاير ، أى أن التغاير:

$$غ = \frac{١}{ن}\ مجـ\ (س - \bar{س})\ (ص - \bar{ص})$$

والتغاير هو الذى يحدد نوع العلاقة بين المتغيرين س ، ص طردية أم عكسية وذلك حسب إشارة البسط (التغاير).

<u>خصائص التغاير:</u>

١. لا يتأثر بالجمع والطرح بمعنى أنه إذا طرحنا أو جمعنا مقدار ثابت لقيم كل متغير على حدة فإن ناتج التغاير لا يختلف.

٢. يتأثر التغاير بالضرب والقسمة ، ولذلك إذا ضربنا أو قسمنا قيم المتغيرين فى أو على مقادير ثابتة لابد من معالجة النتيجة بالعملية العكسية تماماً حتى لا يختلف التغاير.

ملحوظة: تغاير س ، س (متغيران متساويان) هو تباين س

من الخصائص السابقة يتضح أن خصائص التغاير هى نفس خصائص التباين ، ولكن معامل الإرتباط لا يتأثر بالجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة ، وعلى ذلك إذا بسطنا قيم س ، ص بوسط فرضى والقسمة على عامل اختزال معين لا يتم معالجة الناتج بهذه القيم ولذلك يمكن الاستعانة بالطرق المختصرة والمختزلة فى تبسيط أرقام المتغيرين س ، ص فى قوانين معامل الإرتباط كما يلى:

$$ر = \frac{مجـ ح_س ح_ص - ن \bar{ح}_س \bar{ح}_ص}{\sqrt{\left(مجـ ح_س^٢ - ن \bar{ح}_س^٢\right) \times \left(مجـ ح_ص^٢ - ن \bar{ح}_ص^٢\right)}}$$

$$ر = \frac{ن \times مجـ ح_س ح_ص - مجـ ح_س \times مجـ ح_ص}{\sqrt{\left\{ن مجـ ح_س^٢ - \left(مجـ ح_س\right)^٢\right\}\left\{ن مجـ ح_ص^٢ - \left(مجـ ح_ص\right)^٢\right\}}}$$

مثال:

حدد نوع العلاقة أو الإرتباط بين الطول والوزن من البيانات التالية:

الطول (س) ١٦٠ ١٦٥ ١٥٨ ١٦٥ ١٧٠ ١٧٥ ١٦٥ ١٧٣ ١٨٠ ١٧٨

الوزن (ص) ٦٥ ٦٨ ٦٠ ٧٠ ٧٥ ٧٠ ٦٥ ٦٩ ٧٠ ٧٦

الحل:

الطريقة المطولة:

س	ص	$س^٢$	$ص^٢$	س ص
١٦٠	٦٥	٢٥٦٠٠	٤٢٢٥	١٠٤٠٠
١٦٥	٦٨	٢٧٢٢٥	٤٦٢٤	١١٢٢٠
١٥٨	٦٠	٢٤٩٦٤	٣٦٠٠	٩٤٨٠
١٦٥	٧٠	٢٧٢٢٥	٤٩٠٠	١١٥٥٠
١٧٠	٧٥	٢٨٩٠٠	٥٦٢٥	١٢٧٥٠
١٧٥	٧٠	٣٠٦٢٥	٤٩٠٠	١٢٢٥٠
١٦٥	٦٥	٢٧٢٢٥	٤٢٢٥	١٠٧٢٥
١٧٣	٦٩	٢٩٩٢٩	٤٧٦١	١١٩٣٧
١٨٠	٧٠	٣٢٤٠٠	٤٩٠٠	١٢٦٠٠
١٧٨	٧٦	٣١٦٨٤	٥٧٧٦	١٣٥٢٨
١٦٨٩ مجـ س	٦٨٨ مجـ ص	٢٨٥٧٧٧ مجـ س	٤٧٥٣٦ مجـ $ص^٢$	١١٦٤٤٠ مجـ س ص

$$ر = \frac{\text{مجـ س ص} - ن\,\bar{س}\,\bar{ص}}{\sqrt{\left(\text{مجـ س}^٢ - ن\,\bar{س}^٢\right) \times \left(\text{مجـ ص}^٢ - ن\,\bar{ص}^٢\right)}}$$

$$\text{حيث } \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{١٦٨٩}{١٠} = ١٦٨,٩$$

$$\text{حيث } \bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{٦٨٨}{١٠} = ٦٨,٨$$

$$\text{ر} = \frac{١١٦٤٤٠ - ١٠ \times ١٦٨,٩ \times ٦٨,٨}{\sqrt{\left(٢٨٥٧٧٧ - ١٠ \times ١٦٨,٩ \times ١٦٨,٩\right) \times \left(٤٧٥٣٦ - ١٠ \times ٦٨,٨ \times ٦٨,٨\right)}}$$

$$\text{ر} = \frac{١١٦٤٤٠ - ١١٦٢٠٣,٢}{\sqrt{\left(٢٨٥٧٧٧ - ٢٨٥٢٧٢,١\right) \times \left(٤٧٥٣٦ - ٤٧٣٣٤,٤\right)}}$$

$$\text{ر} = \frac{٢٣٦,٨}{\sqrt{٥٠٤,٩ \times ٢٠١,٦}}$$

∴ ر = + ٠,٧٤ ارتباط طردى قوى بين الطول والوزن

الطريقة المختصرة:

بأخذ وسط فرضى لـــ س = ١٦٥ ووسط فرضى لـــ ص = ٧٠

س	ص	ح س	ح ص	$ح_س^٢$	$ح_ص^٢$	ح س ح ص
١٦٠	٦٥	−٥	−٥	٢٥	٢٥	٢٥
١٦٥	٦٨	صفر	−٢	صفر	٤	صفر
١٥٨	٦٠	−٧	−١٠	٤٩	١٠٠	٧٠
١٦٥	٧٠	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
١٧٠	٧٥	٥	٥	٢٥	٢٥	٢٥
١٧٥	٧٠	١٠	صفر	١٠٠	صفر	صفر
١٦٥	٦٥	صفر	−٥	صفر	٢٥	صفر
١٧٣	٦٩	٨	−١	٦٤	١	−٨
١٨٠	٧٠	١٥	صفر	٢٢٥	صفر	صفر
١٧٨	٧٦	١٣	٦	١٦٩	٣٦	٧٨
		٣٩ مج ح س	−١٢ مج ح ص	٦٥٧ مج $ح_س^٢$	٢١٦ مج $ح_ص^٢$	١٩٠ مج ح س ح ص

وباستخدام الصيغة المختصرة الثانية:

$$ر = \frac{ن \times مجـ\ ح_س ح_ص - مجـ\ ح_س \times مجـ\ ح_ص}{\sqrt{\left\{ ن\ مجـ\ ح_س^٢ - \left(مجـ\ ح_س\right)^٢ \right\}\left\{ ن\ مجـ\ ح_ص^٢ - \left(مجـ\ ح_ص\right)^٢ \right\}}}$$

$$ر = \frac{١٠ \times ١٩٠ - ٣٩ \times -١٢}{\sqrt{\{١٠\times٦٥٧-(٣٩)(٣٩)\}\{١٠\times٢١٦-(-١٢)(-١٢)\}}}$$

$$ر = \frac{١٩٠٠ + ٤٦٨}{\sqrt{\{٦٥٧١٠-١٥٢١\}\{٢١٦٠-١٤٤\}}}$$

∴ ر = + ٠,٧٤ ارتباط طردى قوى بين الطول والوزن (نفس الناتج السابق)

<u>(٢) حالة البيانات المبوبة:</u>

فى حالة البيانات المبوبة لمتغيرين س ، ص يتم تفريغها ثم عرضها فى شكل جدول مزدوج ، وفى الجدول المزدوج لا يمكن عرض أو رسم الشكل الانتشارى للبيانات ، ولكن يلاحظ بصفة عامة أنه كلما كانت الأرقام متجمعة حول القطر الرئيسى (الواصل من أعلى اليمين إلى أسفل اليسار) كلما كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص علاقة خطية أو قريبة من الخطية وأيضاً علاقة طردية وعلى العكس كلما كانت الأرقام متجمعة حول القطر الآخر العكسى (الواصل من أعلى اليسار إلى أسفل اليمين) كلما كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص علاقة خطية أو قريبة من الخطية وهى علاقة عكسية بين المتغيرين.

ويشترط لحساب معامل ارتباط بيرسون من الجداول المزدوجة أن تكون فئات س وفئات ص مقفلة مثل الوسط الحسابى والتباين ولذلك لا يصلح قياس معامل ارتباط بيرسون فى حالة الجداول المفتوحة.

وبنفس العرض السابق يمكن الوصول لقوانين معامل ارتباط بيرسون فى التوزيعات التكرارية المزدوجة كما يلى:

الطريقة المطولة:

$$ر = \frac{\text{مجـ ك س ص} - \text{مجـ ك } \bar{س}\ \bar{ص}}{\sqrt{\left(\text{مجـ ك س}^{٢} - \text{مجـ ك } \bar{س}^{٢}\right) \times \left(\text{مجـ ك ص}^{٢} - \text{مجـ ك } \bar{ص}^{٢}\right)}}$$

حيث $\bar{س} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{مجـ ك}}$ ، $\bar{ص} = \frac{\text{مجـ ك ص}}{\text{مجـ ك}}$

صورة أخرى:

$$ر = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك س ص} - \text{مجـ ك س} \times \text{مجـ ك ص}}{\sqrt{\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك س}^{٢} - (\text{مجـ ك س})^{٢}\right\}\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ص}^{٢} - (\text{مجـ ك ص})^{٢}\right\}}}$$

الطريقة المختصرة:

هذه الطريقة تستخدم إذا كانت الفئات متساوية

$$ر = \frac{\text{مجـ ك } ح_{س}\ ح_{ص} - \text{مجـ ك } \bar{ح}_{س}\ \bar{ح}_{ص}}{\sqrt{\left(\text{مجـ ك}_{س}\ ح_{س}^{٢} - \text{مجـ ك } \bar{ح}_{س}^{٢}\right) \times \left(\text{مجـ ك}_{ص}\ ح_{ص}^{٢} - \text{مجـ ك } \bar{ح}_{ص}^{٢}\right)}}$$

حيث $\bar{ح}_{س} = \frac{\text{مجـ ك}_{س}\ ح_{س}}{\text{مجـ ك}}$ ، $\bar{ح}_{ص} = \frac{\text{مجـ ك}_{ص}\ ح_{ص}}{\text{مجـ ك}}$

صورة أخرى:

$$ر = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ } ح_{س}\ ح_{ص} - \text{مجـ ك}_{س}\ ح_{س} \times \text{مجـ ك}_{ص}\ ح_{ص}}{\sqrt{\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك}_{س}\ ح_{س}^{٢} - (\text{مجـ ك}_{س}\ ح_{س})^{٢}\right\}\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك}_{ص}\ ح_{ص}^{٢} - (\text{مجـ ك}_{ص}\ ح_{ص})^{٢}\right\}}}$$

مثال (١):

فيما يلى عينة من ٥٠ عامل موزعين حسب ساعات العمل اليومى وعدد الوحدات المنتجة يومياً فى أحد المصانع:

عدد الساعات / عدد الوحدات	٨-	١٠-	١٢-١٤	المجموع
٢٥-	٦	٩	-	١٥
٣٠-	-	١١	٨	١٩
٣٥-٤٠	-	٦	١٠	١٦
المجموع	٦	٢٦	١٨	٥٠

المطلوب: حساب معامل ارتباط بيرسون بين عدد ساعات العمل اليومى وعدد الوحدات المنتجة يومياً.

الحل:

الطريقة المطولة:

س / ص	-٨	-١٠	١٢-١٤	ك ص	ص (١)	ك ص (٢)	ك ص^{٢} (٣)	ك س (٤)	ك س ص (٥)
-٢٥	٥٤ / ٦ / ١٦٥	٩٩ / ٩ / ٢٤٧,٥	-	١٥	٢٧,٥	٤١٢,٥	١١٣٤٣,٧٥	١٥٣	٤٢٠٧,٥
-٣٠	-	١٣١ / ١١ / ٣٥٧,٥	١٠٤ / ٨ / ٣٦٠	١٩	٣٢,٥	٦١٧,٥	٢٠٠٦٨,٧٥	٢٢٥	٧٣١٢,٥
٣٥-٤٠	-	٦٦ / ٦ / ٢٢٥	١٣٠ / ١٠ / ٣٧٥	١٦	٣٧,٥	٤١٢,٥	٢٢٥٠٠	١٩٦	٧٣٥٠
ك س	٦	٣٦	١٨	٥٠		١٦٣٠	٥٣٩١٢,٥	٥٧٤	١٨٨٧٠
(١) س	٩	١١	١٣						
(٢) ك س	٥٤	٢٨٦	٢٣٤	٥٧٤					
(٣) ك س^{٢}	٤٨٦	٣١٤٦	٣٠٤٢	٦٦٧٤					
(٤) ك ص	١٦٥	٨٣٠	٦٣٥	١٦٣٠					
(٥) ك س ص	١٤٨٥	٩١٣٠	٨٢٥٥	١٨٨٧٠					

ملاحظات على الجدول السابق:

١. الخانة الأولى هى مراكز الفئات للمتغيرين س ، ص

٢. الخانة الثانية عبارة عن حاصل ضرب التكرارات فى مراكز الفئات

٣. الخانة الثالثة عبارة عن حاصل ضرب الخانتين الأولى والثانية

٤. الخانة الرابعة: يتم ضرب كل تكرار مرة فى مراكز فئات س المشتركة مع التكرار فى العمود وتسجيل الناتج فى الزاوية العليا

ومرة فى مراكز فئات ص المشتركة مع التكرار فى الصف وتسجيل الناتج فى الزاوية السفلى ، ثم تجمع الأرقام فى كل صف فى الزاوية العليا تنتج الخانة الرابعة ك س وبجمع الأرقام داخل الزوايا السفلى فى كل عمود تنتج الخانة الرابعة ك ص

٥. الخانة الخامسة تنتج من ضرب الخانة الأولى فى الخانة الرابعة

$$ر = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك س ص} - \text{مجـ ك س} \times \text{مجـ ك ص}}{\sqrt{\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك س}^{٢} - (\text{مجـ ك س})^{٢}\right\}\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ص}^{٢} - (\text{مجـ ك ص})^{٢}\right\}}}$$

$$ر = \frac{٥٠ \times ١٨٨٧٠ - ٥٧٤ \times ١٦٣٠}{\sqrt{\left\{٥٠ \times ٦٦٧٤ - (٥٧٤)^{٢}\right\}\left\{٥٠ \times ٥٣٩١٢,٥ - (١٦٣٠)^{٢}\right\}}}$$

$$ر = \frac{٩٤٣٥٠٠ - ٩٣٥٦٢٠}{\sqrt{\left\{٣٣٣٧٠٠ - ٣٢٩٤٧٦\right\}\left\{٢٦٩٥٦٢٥ - ٢٦٥٦٩٠٠\right\}}}$$

$$ر = \frac{٧٨٨٠}{\sqrt{٤٢٢٤ \times ٣٨٧٢٥}}$$

$\therefore$ ر = + ٠,٦١٦ ارتباط طردى فوق المتوسط بين ساعات العمل وعدد الوحدات المنتجة يومياً.

حل آخر:

الطريقة المختصرة المختزلة:

تصلح إذا كانت الفئات متساوية

	ص \ س	٨-	١٠-	١٢-١٤	ك ص	ص	ح ص	ح َ ص	ك ص ح َ ص	ك ص ح َ^٢ ص	ك ح َ س ح َ ص
	٢٥-	٦ / ٦	٠ / ٩	٠ / -	١٥	٢٧,٥	٥-	١-	١٥-	١٥	٦
	٣٠-	٠ / -	٠ / ١١	٠ / ٨	١٩	٣٢,٥	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
	٣٥-٤٠	٠ / -	٠ / ٦	١٠ / ١٠	١٦	٣٧,٥	٥	١	١٦	١٦	١٠
	ك س	٦	٣٦	١٨	٥٠				١	٣١	١٦
(١)	س	٩	١١	١٣							
(٢)	ح س	٢-	صفر	٢							
(٣)	ح َ س	١-	صفر	١							
(٤)	ك س ح َ س	٦-	صفر	١٨	١٢						
(٥)	ك س ح َ^٢ س	٦	صفر		٢٤						
(٦)	ك ح َ س ح َ ص	٦	صفر		١٦						

يلاحظ على الجدول السابق ما يلى:

١. الخانة الأولى: هى مراكز فئات س ، ومراكز فئات ص

٢. الخانة الثانية: الانحرافات بين مراكز الفئات والوسط الفرضى وقد أخذنا وسط فرضى لـــ س = ١١ ووسط فرضى لـــ ص = ٣٢,٥

٣. الخانة الثالثة: الانحرافات المختزلة وتم الحصول عليها بقسم الخانة الثانية وهى الانحرافات بين مراكز الفئات والوسط الفرضى على طول الفئة أى على رقم ٢ بالنسبة لـــ س والرقم ٥ بالنسبة لـــ ص

٤. الخانة الرابعة: تم الحصول عليها بضرب التكرارات فى الخانة رقم (٣) أى بضرب ك × ح َ

٥. الخانة الخامسة: تم الحصول عليها بضرب الخانة رقم (٣) × الخانة رقم (٤)

٦. الخانة السادسة: تم الحصول عليها بضرب تكرار كل خلية (أو مربع) مرة فى انحرافات س المشتركة مع التكرار فى العمود ومرة فى انحرافات ص المشتركة مع التكرار فى الصف

ويسجل ناتج الضرب فى الزاوية العليا داخل كل مربع أى تم ضرب ك × حَ س × حَ ص

وعلى سبيل المثال المربع الأول (الخلية الأولى) وبه تكرار قيمته ٦ يتم ضرب هذا التكرار : ٦ × –١ ×–١ = ٦ وتسجل فى الهامش العلوى للمربع الأول (الزاوية العليا)

ملاحظات هامة:

١. العمود الكامل فوق انحراف س = صفر وكل خلاياه = صفر والصف الكامل على يمين انحراف ص = صفر وكل خلاياه = صفر

٢. يمكن الاستغناء عن الخانتين الأولى والثانية إذا كانت الجداول المزدوجة ذات فئات متساوية بحيث نبدأ مباشرة بالخانة الثالثة حَ ويمكن كتابتها مختصرة ح فقط بحيث يتم وضع صفر أمام أى فئة وعلى يمين الصفر أو أعلاه تسجل الأعداد الطبيعية السالبة –١ ، –٢ ، –٣ ، ... وهكذا وعلى يسار الصفر أو أسفله تسجل الأعداد الطبيعية الموجبة +١ ، +٢ ، +٣ ، ... وهكذا

$$ر = \frac{مجـ ك \times مجـ ك ح_{س}َ ح_{ص}َ - مجـ ك_{س} ح_{س}َ \times مجـ ك_{ص} ح_{ص}َ}{\sqrt{\left\{مجـ ك \times مجـ ك_{س} ح_{س}^{2} - \left(مجـ ك_{س} ح_{س}َ\right)^{2}\right\}\left\{مجـ ك \times مجـ ك_{ص} ح_{ص}^{2} - \left(مجـ ك_{ص} ح_{ص}َ\right)^{2}\right\}}}$$

$$ر = \frac{٥٠ \times ١٦ - ١٢ \times ١}{\sqrt{\left\{٥٠ \times ٢٤ - (١٢)^{٢}\right\}\left\{٥٠ \times ٣١ - (١)^{٢}\right\}}}$$

$$ر = \frac{٧٨٨}{\sqrt{١٠٥٦ \times ١٥٤٩}}$$

$ر = \frac{٧٨٨}{١٢٧٨,٩٦٢} = + ٠,٦١٦$ ارتباط طردى فوق المتوسط (يتفق تماماً مع الناتج الذى توصلنا له بالطريقة المطولة).

<u>مثال (٢):</u>

احسب معامل ارتباط بيرسون للتوزيع التكرارى المزدوج التالى:

ص \ س	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-١٨٠	$ك_{ص}$
٥٠-	-	-	١٠	١٥	٢٥
٦٠-	-	٢٠	٢٥	١٠	٥٥
٧٠-	-	١٠	١٧	-	٢٧
٨٠-	٨	١٢	٨	-	٢٨
٩٠-١٠٠	٤	١١	-	-	١٥
$ك_{س}$	١٢	٥٣	٦٠	٢٥	١٥٠

<u>الحل:</u>

الطريقة المختصرة المختزلة:

ص \ س	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-	١٦٠-١٨٠	ك ص	ح ص	ك ص ح ص	ك ص ح² ص	ك ح س ح ص
٥٠-	٠ / -	٠ / -	٠ / ١٠	٣٠- / ١٥	٢٥	٢-	٥٠-	١٠٠	٣٠-
٦٠-	٠ / -	٢٠ / ٢٠	٠ / ٢٥	١٠- / ١٠	٥٥	١-	٥٥-	٥٥	١٠
٧٠-	٠ / -	٠ / ١٠	٠ / ١٧	٠ / -	٢٧	صفر	صفر	صفر	صفر
٨٠-	١٦- / ٨	١٢- / ١٢	٠ / ٨	٠ / -	٢٨	١	٢٨	٢٨	٢٨-
٩٠ - ١٠٠	١٦- / ٤	٢٢- / ١١	٠ / -	٠ / -	١٥	٢	٣٠	٦٠	٣٨-
ك س	١٢	٥٣	٦٠	٢٥	١٥٠		٤٧-	٢٤٣	٨٦-
ح س	٢-	١-	صفر	١					
ك س ح س	٢٤-	٥٣-	صفر	٢٥	٥٢-				
ك س ح² س	٤٨	٥٣	صفر	٢٥	١٣٦				
ك ح س ح ص	٣٢-	١٤-	صفر	٤٠-	٨٦-				

$$ر = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك}_{س} ح_{س} ح_{ص} - \text{مجـ ك}_{س} ح_{س} \times \text{مجـ ك}_{ص} ح_{ص}}{\sqrt{\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك}_{س} ح^{2}_{س} - \left(\text{مجـ ك}_{س} ح_{س}\right)^{2}\right\}\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك}_{ص} ح^{2}_{ص} - \left(\text{مجـ ك}_{ص} ح_{ص}\right)^{2}\right\}}}$$

$$ر = \frac{١٥٠ \times -٨٦ - \left(-٥٢ \times -٤٧\right)}{\sqrt{\left\{١٥٠ \times ١٢٦ - \left(-٥٢\right)^{٢}\right\}\left\{١٥٠ \times ٢٤٣ - \left(-٤٧\right)^{٢}\right\}}}$$

$$= \frac{-١٢٩٠٠ - ٢٤٤٤}{\sqrt{\{١٨٩٠٠ - ٢٧٠٤\}\{٣٦٤٥٠ - ٢٢٠٩\}}}$$

$$= \frac{-١٥٣٤٤}{\sqrt{١٦١٩٦ \times ٣٤٢٤١}} = \frac{-١٥٣٤٤}{٢٣٥٤٩,٢٤٩} = -٠,٦٥$$ ارتباط عكسى فوق المتوسط

<u>ثانياً:معامل إرتباط سبيرمان Spearman Correlation Coefficient</u>

يصلح لقياس العلاقة أو الارتباط بين المتغيرات الكمية والمتغيرات النوعية أو الوصفية وذلك إذا أمكن ترتيب الأنواع أو الصفات ترتيباً تصاعدياً أو ترتيباً تنازلياً ، وفى حالة تشابه بعض القيم أو الصفات فتأخذ القيم المتساوية أو المتشابهة رتباً واحدة متوسطة عبارة عن متوسط الرتب لهذه القيم أو الصفات المتشابهة كما لو أنها غير متساوية أو غير متشابهة.

ويعطى معامل ارتباط سبيرمان نتائج أكثر دقة من معامل ارتباط بيرسون إذا كان حجم العينة صغيراً أقل من ٣٠ مفردة. ومعامل سبيرمان له نفس خصائص معامل بيرسون حيث:

$$-١ \leq ر \leq +١$$

<u>(١) حالة البيانات غير المبوبة:</u>

يستخدم القانون التالى فى الوصول لمعامل الارتباط حيث:

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)}$$

حيث ف هى الفروق بين رتب س ورتب ص

ويلاحظ أنه إذا كانت رتب س هى نفس رتب ص المجاورة كانت ف ، ف^{٢} = صفر وبالتالى كان الارتباط تام طردى (+١) كما ينعدم معامل الارتباط إذا كانت ٦ مجـــ ف^{٢} = ن (ن^{٢} – ١) أى أن ر = صفر

مثال (١):

احسب معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين عمر الزوج وعمر الزوجة من واقع بيانات العينة التالية:

عمر الزوج	٤٥	٤٠	٥٠	٦٠	٤٨	٣٥	٥٥	٢٥
عمر الزوجة	٤٠	٣٨	٤٢	٥٠	٣٧	٢٥	٤٥	٢٠

الحل:

س	ص	رتب س	رتب ص	الفروق بين الرتب ف	ف^{٢}
٤٥	٤٠	٤	٥	–١	١
٤٠	٣٨	٣	٤	–١	١
٥٠	٤٢	٦	٦	صفر	صفر
٦٠	٥٠	٨	٨	صفر	صفر
٤٨	٣٧	٥	٣	٢	٤
٣٥	٢٥	٢	٢	صفر	صفر
٥٥	٤٥	٧	٧	صفر	صفر
٢٥	٢٠	١	١	صفر	صفر
					٦ مجـــ ف^{٢}

$$ر = ١ - \frac{٦ مجـ ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٦}{٨(٦٤-١)}$$

$$= ١ - \frac{٣٦}{٥٠٤}$$

= + ٠,٩٣ ارتباط طردى قوى يقترب من التام بين عمر الزوج وعمر الزوجة

مثال (٢):

احسب معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين تقديرات طالبين أ ، ب فى المواد الدراسية التالية:

	رياضة	محاسبة	قانون	اقتصاد	تكاليف	تأمين	احصاء	انتاج
تقديرات أ	ض	جـ	ض جـ	جـ	جـ جـ	م	أ	جـ جـ
تقديرات ب	جـ	م	م	ض	م	جـ جـ	جـ	أ

الحل:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	$ف^{٢}$
ض	جـ	٢	٥,٥	-٣,٥	١٢,٢٥
جـ	م	٤,٥	٣	١,٥	٢,٢٥
ض جـ	م	١	٣	-٢	٤
جـ	ض	٤,٥	١	٣,٥	١٢,٢٥
جـ جـ	م	٦,٥	٣	٣,٥	١٢,٢٥
م	جـ جـ	٣	٧	-٤	١٦
أ	جـ	٨	٥,٥	٢,٥	٦,٢٥
جـ جـ	أ	٦,٥	٨	-١,٥	٢,٢٥
					٦٧,٥ مجـ $ف^{٢}$

ملاحظات على الجدول السابق:

ترتيب تقديرات س ترتيباً تصاعدياً

ض جـ ١

ض ٢

م ٣

جـ ٤ } $\frac{٤+٥}{٢}$ = ٤,٥ متوسط الرتب فى حالة التكرار وتمنح

جـ ٥ } بالتساوى لنفس التقدير

جـ جـ ٦ } $\frac{٦+٧}{٢}$ = ٦,٥ متوسط الرتب فى حالة التكرار وتمنح

جـ جـ ٧ } بالتساوى لنفس التقدير

أ ٨

ترتيب تقديرات ص ترتيباً تصاعدياً

ض ١

م ٢ }

م ٣ } $\frac{٢+٣+٤}{٣}$ = ٣ متوسط الرتب وتمنح بالتساوى لنفس التقدير

م ٤ }

جـ ٥ }

جـ ٦ } $\frac{٥+٦}{٢}$ = ٥,٥ متوسط الرتب وتمنح بالتساوى لنفس التقدير

جـ جـ ٧

أ ٨

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٦٧,٥}{٨ (٦٤ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٤٠٥}{٥٠٤}$$

= + ٠,١٩٦ ارتباط طردى ضعيف بين تقديرات الطالب أ والطالب ب

<u>(٢) حالة البيانات المبوبة:</u>

يصلح معامل ارتباط سبيرمان للبيانات الوصفية والبيانات الكمية ولكن يشترط فى حالة البيانات الكمية فى الجداول التكرارية المزدوجة أن تكون فئات س متساوية وفئات ص متساوية وذلك لإعطاء رتب متدرجة لكل من فئات س ، ص ولا يصلح معامل ارتباط سبيرمان إذا كانت فئات س أو ص أو كليهما غير متساوية لأن الرتب المتدرجة فى هذه الحالة سوف لا تعبر عن أطوال الفئات الحقيقية.

ويصلح معامل ارتباط سبيرمان فى حالة الجداول المفتوحة من البداية أو من النهاية أو من الطرفين لكل من س أو ص أو كليهما بعكس الحال فى معامل ارتباط بيرسون الذى لا يصلح إلا فى حالة الجداول المغلقة لكل من س ، ص

كما يشترط عند حساب معامل ارتباط سبيرمان أن تكون فئات س ، ص مرتبة ترتيباً تصاعدياً.

طريقة الأقطار ذات الفروق المتساوية:

يحسب معامل ارتباط سبيرمان باستخدام القانون التالى:

$$ر = \frac{ع_{س}^{٢} + ع_{ص}^{٢} - ع_{ف}^{٢}}{٢ ع_{س} ع_{ص}}$$

يتضح أن القانون السابق يشمل ثلاث بيانات مختلفة ويتم إعداد جدول مستقل للمتغير س لحساب تباين س وجدول مستقل للمتغير ص لحساب تباين ص ولا يختلف هذان الجدولان عن الجداول التى أعدت عند حساب معامل ارتباط بيرسون ، أما الجدول الثالث لحساب تباين الفروق ويتم إعداده عن طريق تحويل فئات س إلى رتب تصاعدية تبدأ من الرقم واحد للفئة الأولى ثم رقم ٢ للفئة الثانية وهكذا وكذلك تحويل فئات ص إلى رتب تصاعدية ويتم بعد ذلك رسم الأقطار الرئيسية (من أعلى اليمين إلى أسفل اليسار) بحيث تمر هذه الأقطار بالتكرارات الصغيرة (الخلايا) المشتركة لكل من المتغيرين س ، ص ثم يتم تكوين جدول الفروق بخانات رأسية عددها يساوى عدد الأقطار الرئيسية وتمثل الخانة الأولى فى الجدول الجديد للفروق أو الانحرافات بين رتب س ورتب ص ($ح_{ف}$) ويلاحظ أن جميع المربعات التى يمر بها قطر رئيسى واحد تكون الفروق بين رتب س ورتب ص ثابتة ، وتتكون الخانة الثانية ($ك_{ف}$) من مجموع التكرارات الموجودة داخل المربعات التى يمر بها قطر واحد ثم نستكمل الجدول بضرب الخانتين الأولى والثانية لينتج الخانة الثالثة ($ك_{ف} ح_{ف}$) والخانة الرابعة تنتج من ضرب الخانتين الأولى والثالثة $ك_{ف} ح_{ف}^{٢}$

مثال:

باستخدام طريقة الأقطار ذات الفروق المتساوية أوجد معامل ارتباط سبيرمان من واقع بيانات العينة التالية:

س / ص	١٠٠–	١٢٠–	١٤٠–	١٦٠–١٨٠	المجموع
٥٠–	–	–	١٠	١٥	٢٥
٦٠–	–	٢٠	٢٥	١٠	٥٥
٧٠–	–	١٠	١٧	–	٢٧
٨٠–	٨	١٢	٨	–	٢٨
٩٠–١٠٠	٤	١١	–	–	١٥
$ك_{س}$	١٢	٥٣	٦٠	٢٥	١٥٠

الحل:

رتب ص \ رتب س	١	٢	٣	٤	$ك_ص$	$ح_ص$	$ك_ص ح_ص$	$ك_ص ح_ص^٢$
١	-	-	١٠	١٥	٢٥	-٢	-٥٠	١٠٠
٢	-	٢٠	٢٥	١٠	٥٥	-١	-٥٥	٥٥
٣	-	١٠	١٧	-	٢٧	صفر	صفر	صفر
٤	٨	١٢	٨	-	٢٨	١	٢٨	٢٨
٥	٤	١١	-	-	١٥	٢	٣٠	٦٠
$ح_س$	١٢	٥٣	٦٠	٢٥	١٥٠		-٤٧	٢٤٣
$ك_س$	-٢	-١	صفر	١				
$ك_س ح_س$	-٢٤	-٥٣	صفر	٢٥	-٥٢			
$ك_س ح_س^٢$	٤٨	٥٣	صفر	٢٥	١٢٦			

$ح_ف$	$ك_ف$	$ك_ف ح_ف$	$ك_ف ح_ف^٢$
٣	١٥	٤٥	١٣٥
٢	٢٠	٤٠	٨٠
١	٢٥	٢٥	٢٥
صفر	٣٧	صفر	صفر
-١	١٨	-١٨	١٨
-٢	٢	-٢٤	٤٨
-٣	١٩	-٥٧	١٧١
-٤	٤	-١٦	٦٤
	١٥٠	-٥	٥٤١

$$ع_س^٢ = \text{مجـ } ك \times \text{مجـ } ك_س ح_س^٢ - (\text{مجـ } ك_س ح_س)^٢$$

$$= ١٥٠ \times ١٢٦ - (-٥٢)^٢$$

$$= ١٨٩٠٠ - ٢٧٠٤$$

$$= ١٦١٩٦$$

$$\therefore ع_س = ١٢٧,٢٦٤$$

$ع^2_{ص}$ = مجـ ك × مجـ ك$_{ص}$ ح$^2_{ص}$ − (مجـ ك$_{ص}$ ح$_{ص}$)^2

= ١٥٠ × ٢٤٣ × − (−٤٧)^2

= ٣٦٤٥٠ − ٢٢٠٩

= ٣٤٢٤١

∴ ع$_{ص}$ = ١٨٥,٠٤

$ع^2_{ف}$ = مجـ ك × مجـ ك$_{ف}$ ح$^2_{ف}$ − (مجـ ك$_{ف}$ ح$_{ف}$)^2

= ١٥٠ × ٥٤١ × − (−٥)^2

= ٨١١٥٠ − ٢٥

∴ $ع^2_{ف}$ = ٨١١٢٤

$$ر = \frac{ع^2_{س} + ع^2_{ص} - ع^2_{ف}}{٢ ع_{س} \times ع_{ص}}$$

$$= \frac{١٦١٩٦ + ٣٤٢٤١ - ٨١١٢٥}{٢ \times ١٢٧,٢٦٤ \times ١٨٥,٠٤}$$

$$= \frac{٣٠٦٨٨}{٤٧٠٩٧,٨٦}$$

∴ ر = + ٠,٦٥ ارتباط طردى فوق المتوسط

ثالثاً: معامل الاقتران Association Coefficient

هذا المعامل يقيس درجة الارتباط أو الاقتران بين المتغيرات النوعية أو الوصفية ذات الصفتين فقط ، أى يقيس هذا المعامل مدى اقتران الصفات ببعضها البعض ، مثل دراسة العلاقة بين نوع التخصص والوظيفة أو دراسة العلاقة بين التعليم والادخار أو العلاقة بين درجة التعليم والتدخين وهكذا.

ومعامل الاقتران له نفس الخصائص العامة لمعامل الارتباط ، فإذا رمزنا لمعامل الاقتران بالرمز (ق) فإن: $-١ \leq ق \leq ١$

مما سبق يتضح أن جداول الاقتران مزدوجة ثنائية تتكوم من صفين وعمودين ، وبفرض أن جدول الاقتران يأخذ الشكل التالى:

ص \ س	س١	س٢
ص١	أ	ب
ص٢	جـ	د

حيث س ، ص متغيرات وصفية

$$\text{معامل الاقتران} = \frac{\text{أ} \times \text{د} - \text{ب} \times \text{جـ}}{\text{أ} \times \text{د} + \text{ب} \times \text{جـ}}$$

<u>مثال:</u>

حدد العلاقة بين درجة التعليم والتدخين من خلال بيانات جدول الاقتران التالى:

التدخين / التعليم	مدخن	غير مدخن
متعلم	٢٠	٤٠
غير متعلم	٣٠	١٠

<u>الحل:</u>

$$ق = \frac{أ \times د - ب \times جـ}{أ \times د + ب \times جـ}$$

$$ق = \frac{٢٠ \times ١٠ - ٤٠ \times ٣٠}{٢٠ \times ١٠ + ٤٠ \times ٣٠}$$

$$= \frac{٢٠٠ - ١٢٠٠}{٢٠٠ + ١٢٠٠} = \frac{- ١٠٠٠}{١٤٠٠}$$

$$\therefore ق = - ٠,٧١$$

أى أنه يوجد اقتران أو ارتباط عكسى قوى بين درجة التعليم والتدخين بمعنى أنه كلما زادت درجة التعليم كلما قل الاقبال على التدخين.

رابعاً: معامل التوافق Contingency Coefficient

معامل التوافق يقيس العلاقة أو الارتباط بين المتغيرات الوصفية أو النوعية والتى تزيد عن صفتين أو نوعين ، كما يصلح إذا كان أحد المتغيرين وصفى والمتغير الآخر كمى ، وأبسط صيغة لمعامل التوافق هى الصيغة التالية:

إذا رمزنا لمعامل التوافق بالرمز (و) فإن:

$$و = \sqrt{\frac{ب - ١}{ب}}$$

$$= \sqrt{١ - \frac{١}{ب}}$$

ويعتبر معامل التوافق كمية موجبة دائماً لذلك هو يحدد وجود علاقة بين المتغيريين أم لا وهل العلاقة ضعيفة أم قوية ولكنه لا يحدد نوع أو اتجاه العلاقة (عكسية أو طردية) ، كما أنه لا يمكن أن يكون ارتباطاً تاماً ، كما يتأثر بترتيب التكرارات.

$\therefore$ و $\geq$ ٠

ويتم حساب المقدار (ب) من العلاقة التالية:

$$ب = مجموع \left(\frac{مربع\ كل\ تكرار}{مجموع\ تكرار\ العمود \times مجموع\ تكرار\ الصف} \right)$$

$$\therefore ب = مجـ \left(\frac{ك^{٢}_{ع ص}}{مجـ ك_{ع} \times مجـ ك_{ص}} \right)$$

<u>مثال:</u>

حدد العلاقة بين درجة الوعى المصرفى ومستوى التعليم باستخدام بيانات العينة التالية:

درجة الوعى المصرفى / مستوى التعليم	يدخر فى أوعية مصرفية	لا يدخر فى أوعية مصرفية	$ك_{ص}$
عالى	١٥	٥	٢٠
متوسط	٣٠	٢٠	٥٠
أقل من المتوسط	١٠	٢٠	٣٠
$ك_{ع}$	٥٥	٤٥	١٠٠

<u>الحل:</u>

$$ب = \left(\frac{١٥^{٢}}{٥٥ \times ٢٠}\right) + \left(\frac{٥^{٢}}{٤٥ \times ٢٠}\right) + \left(\frac{٣٠^{٢}}{٥٥ \times ٥٠}\right) + \left(\frac{٢٠^{٢}}{٤٥ \times ٥٠}\right) + \left(\frac{١٠^{٢}}{٥٥ \times ٣٠}\right) + \left(\frac{٢٠^{٢}}{٤٥ \times ٣٠}\right)$$

$$ب = \frac{٢٢٥}{١١٠٠} + \frac{٢٥}{٩٠٠} + \frac{٩٠٠}{٢٧٥٠} + \frac{٤٠٠}{٢٢٥٠} + \frac{١٠٠}{١٦٥٠} + \frac{٤٠٠}{١٣٥٠}$$

$$= ٠,٢٠٤٥ + ٠,٠٢٧٨ + ٠,٣٢٧٣ + ٠,١٧٧٨ + ٠,٠٦٠٦ + ٠,٢٩٦٣$$

$$\therefore ب = ١,٠٩٤٣$$

$$\therefore و = \sqrt{١ - \frac{١}{ب}}$$

$$= \sqrt{١ - \frac{١}{١,٠٩٤٣}} = \sqrt{٠,٠٨٦٢} \quad \therefore و = + ٠,٢٩$$

أى أن هناك ارتباط بين درجة الوعى المصرفى ومستوى التعليم ولكن لا يمكن تحديد اتجاه هذه العلاقة (عكسية أم طردية).

معامل التحديد: Determination Coefficient

معامل التحديد عبارة عن مربع معامل الارتباط أى أن:

معامل التحديد = $ر^{٢}$

ويعبر معامل التحديد عن النسبة المئوية من التغير الكلى فى المتغير التابع (ص) والتى ترجع إلى أو يتسبب فيها المتغير المستقل (س) ولذلك يطلق على المتغير المستقل (س) المتغير التفسيرى ، وإذا كان التغير الكلى فى المتغير (ص) يمكن أن يقاس بدلالة التباين ($ع_{ص}^{٢}$) لذلك فإن معامل التحديد يحدد النسبة الكلية من هذا التباين التى ترجع إلى أو يتسبب فيها المتغير التفسيرى أو المستقل (س) ويظل هناك جزء آخر من التغير الكلى غير مفسر (متمم النسبة) ويرجع هذا الجزء غير المفسر للتغير العشوائى أو الخطأ العشوائى.

أى أن معامل التحديد = $\frac{\text{التغير المفسر}}{\text{التغير الكلى}}$

ويعتبر معامل التحديد مقياس نسبى لا يتأثر بوحدات القياس.

ويرتبط معامل التحديد بعلاقة سببية بين المتغيرين س ، ص (علاقة انحدارية) بعكس معامل الارتباط الذى لا يرتبط بهذه العلاقة ، كما يشترط أن يكون معامل الانحدار المقدر له معنوية احصائية حتى تتأكد العلاقة السببية بين المتغيرين س ، ص

وإذا كان معامل التحديد = ر^{٢} ويمثل الجزء المفسر للمتغير التابع فإن معامل عدم التحديد = ١ – ر^{٢} وهو يمثل الجزء أو النسبة غير المفسرة والتى ترجع للعوامل العشوائية.

وتتراوح قيمة معامل التحديد بين صفر ، +١ أى أن ٠ ≤ ر^{٢} ≤ ١

وأيضاً يمكن حساب معامل التحديد عن طريق معاملى الانحدار كما يلى:

ر^{٢} = أ × جـ

ويستخدم معامل التحديد فى الحكم على التوفيق الجيد للبيانات الفعلية أو المشاهدة وعلى سبيل المثال إذا كان معامل التحديد ر^{٢} = ٨٠٪ فهذا معناه أن خط الانحدار يعطى توفيقاً جيداً للبيانات المشاهدة حيث يفسر المتغير المستقل (س) ٨٠٪ من التغير الكلى فى المتغير التابع (ص)

الفصل الثانى
الانحدار الخطى البسيط
Simple Linear Regression

مقدمة:

تعرضنا فى الفصل السابق لقياس العلاقة أو الارتباط بين المتغيرين س ، ص والآن مطلوب تحديد العلاقة الرياضية أو الدالة التى تربط بين المتغيرين س ، ص من واقع نفس البيانات وتحديد درجة هذه الدالة ومن ثم أياً من المتغيرين متغير مستقل Independent Variable وأيهما متغير تابع Dependent Variable وأخيراً استخدام الدالة التى تحدد العلاقة بين المتغيريين فى التنبؤ بالمتغير التابع بدلالة أى قيمة معطاه للمتغير المستقل.

الانحدار الخطى:

إذا حددنا الشكل الانتشارى لبيانات المتغيرين س ، ص على الرسم البيانى وكانت جميع نقط س ، ص تقع على استقامة واحدة (على مسار خط مستقيم) كانت العلاقة بين المتغيرين علاقة خطية وكان الارتباط تاماً سواء كان طردياً أو عكسياً ، ولكن عملياً يصعب أن تكون جميع نقط المتغيرين س ، ص على استقامة واحدة ويكون المطلوب فى هذه الحالة تمهيد خط مستقيم يمر بمعظم النقط ويتوسط باتزان باقى النقط الأخرى ويطلق على هذا الخط خط انحدار.

وقد يكون الأنسب تمهيد منحنى منتظم يتوسط معظم النقط وفى هذه الحالة تكون العلاقة بين المتغيرين علاقة غير خطية ، وسنكتفى بدراستنا فى هذا المرجع على العلاقة الخطية فقط بين المتغيرين س ، ص.

<u>طريقة المربعات الصغرى Least Squares Method</u>

بمقتضى هذه الطريقة إذا أمكننا رسم أكثر من خط مستقيم يمر بمعظم النقط ويتوسط باتزان باقى النقط الأخرى سنجد حتماً أن هناك فروق أو انحرافات موجبة وسالبة بين النقط الأصلية التى تقع فوق أو أسفل الخط وبين النقط الجديدة الاتجاهية والتى تقع على الخط المستقيم الممهد وإذا حسبنا الانحرافات الموجبة والسالبة (الأبعاد الرأسية العمودية) وربعنا هذه الانحرافات وجمعناها فإن أفضل خط مستقيم يتوسط هذه النقط هو الذى يحقق أقل مجموع مربعات الانحرافات أو الفروق بين القيم الأصلية والقيم الجديدة الاتجاهية (التى تقع على خط الاتجاه العام) ولذلك يطلق على هذه الطريقة فى تحديد خط الانحدار الأمثل رياضياً بطريقة المربعات الصغرى.

<u>أولاً: خط انحدار ص على س (ص / س):</u>

<u>(١) حالة البيانات غير المبوبة:</u>

إذا فرضنا أن خط الانحدار الأمثل (ص / س) والذى يتحدد وفقاً لطريقة المربعات الصغرى هو الخط المستقيم الذى معادلته هى:

ص = أ س + ب

ولتحديد خط الانحـــدار الســـابق (ص / س) لابد من تحـــديد المعاملات (أ ، ب) حيث يطلق على (أ) معامل انحدار ص / س وهو عبارة عن

ميل الخط المستقيم والميل يتحدد على أساس ظل الزاوية التى يصنعها الخط المستقيم (خط الانحدار) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، كما يعبر المعامل (أ) عن معدل التغير فى المتغير التابع (الدالة) ص بالنسبة للمتغير المستقل س ومعدل التغير عبارة عن التفاضل أو المعامل التفاضلى الأول أو المشتقة الأولى (ص = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ أو $\overline{\text{ص}}$) ، وإشارة معامل الانحدار (أ) تعبر عن اتجاه العلاقة بين المتغيرين س ، ص أو نوعها (طردية أو عكسية).

ويطلق على المعامل (ب) ثابت الانحدار (المقدار الثابت فى المعادلة الانحدارية) ويمثل الجزء المقطوع من محور الصادات.

ويتم حساب المعاملات أ ، ب على النحو التالى:

بما أن س متغير يمكن أن يأخذ القيم: $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ، $\text{س}_{٣}$ ، ...... ، $\text{س}_{\text{ن}}$

بما أن ص متغير يمكن أن يأخذ القيم: $\text{ص}_{١}$ ، $\text{ص}_{٢}$ ، $\text{ص}_{٣}$ ، .... ، $\text{ص}_{\text{ن}}$

وبالتعويض فى معادلة الانحدار السابقة عن س بمجموع قيم س وعن ص بمجموع قيم ص نجد أن:

مجـــ ص = أ مجـــ س + ن ب ⟵ (١)

وبضرب طرفى معادلة الانحدار الأصلية فى المتغير س وإيجاد مجموع الطرفين نجد أن:

مجـــ س ص = أ مجـــ $\text{س}^{٢}$ + ب مجـــ س ⟵ (٢)

ويمكن عن طريق تكوين جدول لقيم المتغيرين س ، ص ثم إيجاد مجاميع الخانات التالية: س ، ص ، $س^{٢}$ ، س ص وبالتعويض عن هذه المجاميع فى المعادلتين السابقتين ثم حل المعادلتين معاً جبرياً نصل لقيم المعاملات أ ، ب أو نقوم بحل المعادلات معاً جبرياً بالرمـــوز نصل لقيم المعاملات أ ، ب عن طريق استخدام القوانين التالية:

الطريقة المطولة:

$$أ = \frac{ن \times مجـ س ص - مجـ س \times مجـ ص}{ن \times مجـ س^{٢} - (مجـ س)^{٢}}$$

الطريقة المختصرة:

$$أ = \frac{ن \times مجـ ح_{س} ح_{ص} - مجـ ح_{س} \times مجـ ح_{ص}}{ن \times مجـ ح_{س}^{٢} - \left(مجـ ح_{س}\right)^{٢}}$$

ويلاحظ فى القوانين السابقة أن $أ = \frac{التغاير}{تباين\ س}$

ويلاحظ أن هناك علاقة هـــامة بين معامل الارتبـــاط ومعامل انحـــدار ص / س حيث نجد أن:

$$أ = ر \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$$

كما يمكن حساب المعامل (ب) من معادلة انحدار ص / س الأصلية وهى:

$$ص = أ س + ب$$

وذلك بعد التعويض عن قيم س بالوسط الحسابى لـــ س = $\overline{س}$ والتعويض عن قيم ص بالوسط الحسابى لـــ ص = $\overline{ص}$ يمكن استنتاج (ب) كما يلى:

$$ب = \overline{ص} - أ \overline{س}$$

$$= \frac{مجـ ص}{ن} - أ \times \frac{مجـ س}{ن}$$

وبعد الحصـــول على المعـــاملات أ ، ب يمكن استخدام معادلة انحدار ص / س فى التنبؤ بقيمة المتغير التابع ص عند أى قيمة معطاه للمتغير المستقل س.

(٢) حالة البيانات المبوبة:

بنفس طريقة العرض السابق يمكن أن نصل للقوانين التالية والتى تطبق فى حالة البيانات المبوبة فى جداول تكرارية مزدوجة للمتغيرين س ، ص كما يلى:

الطريقة المطولة:

$$أ = \frac{مجـ ك \times مجـ ك س ص - مجـ ك س \times مجـ ك ص}{مجـ ك \times مجـ ك س^{٢} - (مجـ ك س)^{٢}}$$

الطريقة المختصرة:

$$أ = \frac{مجـ ك \times مجـ ك ح_{س} ح_{ص} - مجـ ك ح_{س} \times مجـ ك ح_{ص}}{مجـ ك \times مجـ ك ح_{س}^{٢} - (مجـ ك ح_{س})^{٢}}$$

وبعد حساب (أ) بالطريقة المطولة أو المختصرة تستخدم فى إيجادقيمة المعامل (ب) وبنفس العلاقة السابقة حيث:

$$ب = \overline{ص} - أ\ \overline{س}$$

ثانياً: خط انحدار س على ص (س / ص):

بفرض أن خط الانحدار الأمثل (س / ص) والذى يتحدد وفقاً لطريقة المربعات الصغرى هو الخط المستقيم الذى معادلته هى:

$$س = جـ\ ص + د$$

حيث (جـ) هى معامل انحدار س على ص (س / ص) ، د هى ثابت الانحدار

وبنفس طريقة العرض السابق يمكن حساب قيم المعاملات (جـ ، د) من القوانين التالية:

(١) حالة البيانات غير المبوبة:

الطريقة المطولة:

$$جـ = \frac{ن \times مجـ\ س\ ص - مجـ\ س \times مجـ\ ص}{ن \times مج\ ص^{٢} - (مج\ ص)^{٢}}$$

الطريقة المختصرة:

$$جـ = \frac{ن \times مجـ\ ح_{س}\ ح_{ص} - مجـ\ ح_{س} \times مجـ\ ح_{ص}}{ن \times مج\ ح_{ص}^{٢} - (مج\ ح_{ص})^{٢}}$$

ويلاحظ فى القوانين السابقة أن جـ = $\frac{\text{التغاير}}{\text{تباين ص}}$

ولذلك هناك علاقة هامة بين معامل الارتباط ومعامل انحـــدار س / ص وهى:

$$\text{جـ} = \text{ر} \times \frac{\text{ع}_{\text{س}}}{\text{ع}_{\text{ص}}}$$

كما يمكن حساب المعامل (د) من العلاقة التالية:

$$\text{د} = \overline{\text{س}} - \text{جـ}\ \overline{\text{ص}}$$

$$= \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} - \text{جـ} \times \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$$

(٢) حالة البيانات المبوبة:

الطريقة المطولة:

$$\text{جـ} = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك س ص} - \text{مجـ ك س} \times \text{مجـ ك ص}}{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ص}^{٢} - \left(\text{مجـ ك ص}\right)^{٢}}$$

الطريقة المختصرة:

$$\text{جـ} = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك ح}_{\text{س}}\text{ح}_{\text{ص}} - \text{مجـ ك}_{\text{س}}\text{ح}_{\text{س}} \times \text{مجـ ك}_{\text{ص}}\text{ح}_{\text{ص}}}{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك}_{\text{ص}}\text{ح}_{\text{ص}}^{٢} - \left(\text{مجـ ك}_{\text{ص}}\text{ح}_{\text{ص}}\right)^{٢}}$$

علاقات هامة:

بما أن $أ = ر \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$ ⟵ (١)

بما أن $جـ = ر \times \frac{ع_{س}}{ع_{ص}}$ ⟵ (٢)

وبضرب العلاقتين السابقتين معاً نجد أن:

$أ \times جـ = ر^{٢}$ (معامل التحديد) ⟵ (٣)

أى يمكن حساب معامل التحديد عن طريق حاصل ضرب معاملى الانحدار.

وبإيجاد الجذر التربيعى لطرفى المعادلة (٣)

$\therefore ر = \sqrt{أ \times جـ}$ ومنها يمكن إيجاد معامل الارتباط عن طريق معاملى الانحدار

ملاحظة هامة: يلاحظ أن إشارة معاملى الانحدار أ ، جـ لابد أن تتشابه أو تتطابق إما الإشارتان موجبتان ويكون معامل الارتباط هو الجذر التربيعى الموجب لـ أ × جـ وإما الإشارتان سالبتان ويكون معامل الارتباط هو الجذر التربيعى السالب لـ أ × جـ

<u>مثال (١):</u>

الأسعار س	١٠	١٢	١٥	٢٠	٣٠	٥٠
الكميات ص	٤	٧	١٢	١٥	١٨	٢٠

المطلوب:

- أوجد معادلة انحدار ص / س وتنبأ بالكميات المتوقعة عندما يكون السعر ١٠٠ جنيه.
- أوجد معادلة انحدار س / ص وتنبأ بالأسعار المتوقعة عندما تكون الكمية ٣٠ وحدة.
- استنتج معامل الارتباط بين المتغيرين بدلالة معاملى الانحدار.

<u>الحل:</u>

س	ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$	س ص
١٠	٤	١٠٠	١٦	٤٠
١٢	٧	١٤٤	٤٩	٨٤
١٥	١٢	٢٢٥	١٤٤	١٨٠
٢٠	١٥	٤٠٠	٢٢٥	٣٠٠
٣٠	١٨	٩٠٠	٣٢٤	٥٤٠
٥٠	٢٠	٢٥٠٠	٤٠٠	١٠٠٠
١٣٧ مجـــ س	٧٦ مجـــ ص	٤٢٦٩ مجـــ $س^{٢}$	١١٥٨ مجـــ $ص^{٢}$	٢١٤٤ مجـــ س ص

- <u>إيجاد معادلة انحدار ص / س</u>

ص = أ س + ب

حيث:

$$أ = \frac{ن \times مجـ س ص - مجـ س \times مجـ ص}{ن \times مجـ س^{٢} - (مجـ س)^{٢}}$$

$$أ = \frac{٦ \times ٢١٤٤ - ١٣٧ \times ٧٦}{٦ \times ٤٢٦٩ - ١٣٧ \times ١٣٧}$$

∴ أ = ٠,٣٥٨

ب = $\overline{ص}$ – أ $\overline{س}$

$$= \frac{مجـ ص}{ن} - ٠,٣٥٨ \times \frac{مجـ س}{ن}$$

$$= \frac{٧٦}{٦} - ٠,٣٥٨ \times \frac{١٣٧}{٦}$$

∴ ب = ٤,٤٩٣

∴ معادلة انحدار ص / س هى:

ص = ٠,٣٥٨ س + ٤,٤٩٣

التنبؤ بالكمية ص عندما يكون السعر س = ١٠٠ جنيه

ص = ٠,٣٥٨ × ١٠٠ + ٤,٤٩٣

∴ ص = ٤٠,٢٩٣ وحدة

- <u>إيجاد معادلة انحدار س / ص</u>

س = جـ ص + د

حيث:

$$جـ = \frac{ن \times مجـ س ص - مجـ س \times مجـ ص}{ن \times مجـ ص^{٢} - (مجـ ص)^{٢}}$$

$$جـ = \frac{٦ \times ٢١٤٤ - ١٣٧ \times ٧٦}{٦ \times ١١٥٨ - ٧٦ \times ٧٦}$$

∴ جـ = ٢,٠٩٢

د = $\overline{س}$ − جـ $\overline{ص}$

$$= \frac{مجـ س}{ن} - ٢,٠٩٢ \times \frac{مجـ ص}{ن}$$

$$= \frac{١٣٧}{٦} - ٢,٠٩٢ \times \frac{٧٦}{٦}$$

∴ د = − ٣,٦٦٦

∴ معادلة انحدار س / ص هى:

س = ٢,٠٩٢ ص − ٣,٦٦٦

التنبؤ بالسعر س عندما تكون الكمية ص = ٣٠ وحدة

س = ٢,٠٩٢ × ٣٠ − ٣,٦٦٦

∴ س = ٥٩,٠٩٤ جنيه

- <u>إيجاد معامل الارتباط بين المتغيرين:</u>

∵ ر = $\sqrt{أ \times جـ}$

∴ ر = $\sqrt{٠,٣٥٨ \times ٢,٠٩٢}$

∴ ر = ٠,٨٦٥

ارتباط طردى قوى بين الأسعار والكميات

مثال (٢):

فى المثال (٢) للبيانات المبوبة فى معامل ارتباط بيرسون حيث كانت ر بالطريقة المختصرة المختزلة كما يلى:

$$ر = \frac{-١٥٣٤٤}{\sqrt{٣٤٢٤١ \times ١٦١٩٦}} = \frac{-١٥٣٤٤}{٢٣٥٤٩{,}٢٤٩} = -٠{,}٦٥$$ ارتباط عكسى متوسط

المطلوب:

أ – إيجاد معادلة انحدار ص / س وتنبأ بقيمة ص عندما س = ٢٠٠

ب– إيجاد معادلة انحدار س / ص وتنبأ بقيمة س عندما ص = ١١٠

ج– أوجد معامل الارتباط بدلالة معاملى الانحدار

الحل:

أ – إيجاد معادلة انحدار ص / س

ص = أ س + ب

حيث:

$$أ = \frac{\text{بسط معامل الارتباط}}{\text{تباين س}} = \frac{-١٥٣٤٤}{١٦١٩٦} = -٠{,}٩٤٧٤$$

إيجاد الوسط الحسابى لــ س:

$$\overline{س} = ط_{س} \times \frac{\text{مجــ}ك\,ح_{س}}{\text{مجــ}ك} + أ_{س}$$ (مركز الفئة أمام $ح_{س}$ = صفر)

$\overline{س} = ٢٠ \times \frac{-٥٢}{١٥٠} + ١٥٠ = ١٤٣,٠٦٧$

$\overline{ص} = ط_{ص} \times \frac{مجـ ك_{ص} ح_{ص}}{مجـ ك} + أ_{ص}$ (مركز الفئة أمام $ح_{ص}$ = صفر)

$\overline{ص} = ١٠ \times \frac{-٤٧}{١٥٠} + ٧٥ = ٧١,٨٦٧$

$ب = \overline{ص} - أ\,\overline{س}$

$= ٧١,٨٦٧ - (-٠,٩٤٧٤ \times ١٤٣,٠٦٧)$

$\therefore$ ب = ٢٠٧,٤٠٩

وتكون معادلة انحدار ص / س هى:

ص = أ س + ب

ص = − ٠,٩٤٧٤ س + ٢٠٧,٤٠٩

عندما س = ٢٠٠

$\therefore$ ص = − ٠,٩٤٧٤ × ٢٠٠ + ٢٠٧,٤٠٩ = ١٨ تقريباً

<u>ب− إيجاد معادلة انحدار س / ص</u>

س = جـ ص + د

حيث جـ = $\frac{\text{بسط معامل الارتباط}}{\text{تباين ص}} = \frac{-١٥٣٤٤}{٣٤٢٤١} = -٠,٤٤٨١$

$د = \overline{س} - أ\,\overline{ص}$

= ١٤٣,٠٦٧ – (–٠,٤٤٨١ × ٧١,٨٦٧)

∴ د = ١٧٥,٢٧١

وتكون معادلة انحدار س / ص هى:

س = جـ ص + د

س = – ٠,٤٤٨١ ص + ١٧٥,٢٧١

عندما ص = ١١٠

∴ س = – ٠,٤٤٨١ × ١١٠ + ١٧٥,٢٧١ = ١٢٦ تقريباً

جـ– إيجاد معامل الارتباط ر

ر = $\sqrt{\text{أ × جـ}}$

ر = $\sqrt{\text{–٠,٩٤٧٤ × –٠,٤٤٨١}}$

∴ ر = –٠,٦٥ ارتباط عكسى متوسط وهى نفس الإجابة التى سبق أن توصلنا إليها عند حل المثال الثانى للبيانات المبوبة فى معامل ارتباط بيرسون.

مثال (٣):

إذا كان الوسط الحسابى لعمر الزوج ٥٠ سنة والوسط الحسابى لعمر الزوجة ٤٥ سنة والانحراف المعيارى لعمر الزوج ٥ سنة والانحراف المعيارى لعمر الزوجة ٦ سنة ومعامل الارتباط بين عمر الزوج وعمر الزوجة = ٠,٨ أوجد معادلة انحدار عمر الزوجة على عمر الزوج واحسب عمر الزوجة المتوقع عندما يكون عمر الزوج ٦٠ سنة

الحل:

$\overline{س} = ٥٠$ $\overline{ص} = ٤٥$

ع $_{س}$ = ٥ ع $_{ص}$ =٦

ر = ٠,٨

معادلة انحدار ص / س هى:

ص = أ س + ب

بما أن أ = ر × $\frac{ع_{ص}}{ع_{س}}$

∴ أ = ٠,٨ × $\frac{٦}{٥}$ = ٠,٩٦

بما أن ب = $\overline{ص}$ – أ $\overline{س}$

∴ ب = ٤٥ – ٠,٩٦ × ٥٠ = –٣

وتكون معادلة انحدار عمر الزوجة على عمر الزوج هى:

ص = ٠,٩٦ –٣

وعندما س = ٦٠

∴ ص = ٠,٩٦ × ٦٠ – ٣ = ٥٤,٦ سنة

مثال (٤):

إذا كانت معادلتى خط انحدار متغيرين س ، ص هما:

١٠٠ ص = ٤٥ س – ١١٥

٤٠ س = ٨٠ ص + ٨,٥

احسب معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص

الحل:

يتم وضع المعادلتين السابقتين على صورة:

ص = أ س + ب ، س = جـ ص + د

ولذلك يتم تحويل معامل كل من س ، ص فى الطرف الأيمن إلى الواحد الصحيح كما يلى:

بقسمة طرفى المعادلة الأولى على ١٠٠ وبقسمة طرفى المعادلة الثانية على ٤٠

∴ ص = ٠,٤٥ س – ١,١٥

∴ س = ٢ ص + ٠,٢١٢٥

∴ أ = ٠,٤٥ ، جـ = ٢

ر = $\sqrt{\text{أ} \times \text{جـ}}$ = $\sqrt{٠,٤٥ \times ٢}$

∴ ر = + ٠,٩٥ ارتباط طردى قوى بين المتغيرين س ، ص يقترب من الارتباط التام

تمارين على الباب الرابع

.١

الأسعار	١٥	٢٠	٣٠	٤٥	٦٥	٧٠	٩٠	٧٠	١٠٠	٧٠
الكميات	٦	٨	٦	١٠	١٢	١٥	٦	٨	١١	١٥

المطلوب:

أ – احسب معامل ارتباط بيرسون بين الأسعار والكميات

ب – احسب معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين الأسعار والكميات

جـ– أوجد معادلة انحدار الأسعار على الكميات وتنبأ بالسعر عندما تكون الكمية ٢٠ وحدة

د – أوجد معادلة انحدار الكميات على الأسعار وتنبأ بالكمية عندما يكون السعر ١٢٠ جنيه

هـ– تأكد من صحة معامل ارتباط بيرسون عن طريق معاملى الانحدار

٢. فيما يلى تقديرات طالبين أ ، ب فى مواد البرنامج التدريبى المختلفة:

المادة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الطالب أ	أ	ج	أ	ج ج	م	ج	ج	ج ج	ض	م
الطالب ب	ج ج	ج	ج ج	أ	ض	ج	أ	ج	م	ج ج

احسب معامل ارتباط سبيرمان بين تقديرات أ ، ب وعلق على الناتج

٣. فيما يلى عينة حجمها ١٣٠ من الرجال والنساء موزعين حسب مستوى تحصيلهم فى اللغات:

مستوى التحصيل / النوع	ضعيف	متوسط	جيد	جيد جداً	المجموع
رجال	١٠	٣٠	٢٠	٥	٦٥
نساء	٥	١٠	٣٠	٢٠	٦٥
المجموع	١٥	٤٠	٥٠	٢٥	١٣٠

حدد العلاقة بين النوع ومستوى تحصيل اللغات باستخدام معامل التوافق.

٤. فيما يلى عينة حجمها ١٥٠ وحدة منتجة موزعة حسب سعر التكلفة وسعر البيع:

سعر البيع / سعر التكلفة	١٢–	١٥–	١٨–	٢١–	٢٤–٢٧	المجموع
١٠–	١٥	١٨	–	–	–	٣٣
١٤–	–	٢٥	٢٧	٣٣	–	٨٥
١٨–٢٢	–	–	٧	١٢	١٣	٣٢
المجموع	١٥	٤٣	٣٤	٤٥	١٣	١٥٠

المطلوب:

أ – احسب معامل ارتباط بيرسون

ب– أوجد معادلة انحدار سعر البيع على سعر التكلفة وتنبأ بسعر البيع عندما تكون التكلفة ٣٠ جنيه

ج – أوجد معادلة انحدار سعر التكلفة على سعر البيع وتنبأ بسعر التكلفة عندما يكون سعر البيع ٥٠ جنيه

د – احسب معامل ارتباط بيرسون عن طريق معاملى الانحدار

هـ– احسب معامل ارتباط سبيرمان بطريقة الأقطار ذات الفروق المتساوية

٥. حدد مدى اقتران نوع القطن بالمحافظة المنتجة من خلال التوزيع التالى:

نوع القطن / سعر التكلفة	قصير التيلة	طويل التيلة	المجموع
الفيوم	٣٠	٢٠	٥٠
أسيوط	٢٥	٤٥	٧٠
المجموع	٥٥	٦٥	١٢٠

٦. فيما يلى عينة حجمها ١٢٥ وحدة منتجة موزعة حسب الأرباح الصافية والتكاليف الكلية:

التكاليف / الأرباح	٨٠-	١٠٠-	١٢٠-	١٤٠-١٦٠	المجموع
٢٠-	–	–	٤	١٥	١٩
٢٥-	–	–	٢٥	١١	٣٦
٣٠-	–	١٣	٢٧	–	٤٠
٣٥-٤٠	١٢	١٨	–	–	٣٠
المجموع	١٢	٣١	٥٦	٢٦	١٢٥

المطلوب:

أ – حساب معامل ارتباط بيرسون

ب– أوجد معادلة انحدار الأرباح على التكاليف وتنبأ بالأرباح عندما تكون التكاليف ٢٠٠ جنيه

جـ – احسب معامل التحديد واشرح مدلوله

د – احسب معامل ارتباط سبيرمان

٧. بلغ معـــامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص ٠,٦ والوسط الحسابى لـــ س = ٢٥ والوسط الحسابى لـــ ص = ٣٠ وتباين س = ١٦ وتباين ص = ٣٦

المطلوب:

أ – أوجد معادلة انحدار ص / س وتنبأ بقيمة ص عندما س = ٥٠

ب– أوجد معادلة انحدار س / ص وتنبأ بقيمة س عندما ص = ٣٠

٨. إذا علم أن:

مج س = ٤٠ ، مج ص = ١٢٢ ، مج س^{٢} = ٣٤٦ ، مج ص^{٢}=٣٠٩٤

مج س ص = ١٠٢١

المطلوب:

أ – احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص

ب– أوجد معادلة انحدار ص / س

جـ – أوجد معادلة انحدار س / ص

٩.

الدخل	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٧٠٠	١٠٠٠
الاستهلاك	١٠٠	١٥٠	٢١٠	٢٧٠	٣٢٠	٤٥٠	٦٠٠	٩٠٠

أ – احسب معامل ارتباط بيرسون بين الدخل والاستهلاك

ب– احسب معامل ارتباط سبيرمان بين الدخل والاستهلاك

جـ – أوجد معادلة انحدار الدخل على الاستهلاك وتنبأ بالدخل المتوقع عندما يكون الاستهلاك ١٠٠٠ جنيه

د – استنتج معامل انحدار الاستهلاك على الدخل بمعلومية معامل الارتباط ومعامل انحدار الدخل على الاستهلاك

هـ– احسب معامل التحديد مع التفسير

١٠. لدينا عينة حجمها ١٥٠ شخصاً موزعون حسب الاستهلاك الشهرى والادخار الشهرى:

الاستهلاك / الادخار	١٠٠–	١٥٠–	٢٠٠–	٢٥٠–٣٠٠	المجموع
٥٠	–	–	١١	١٥	٢٦
٨٠	–	٥	٢٥	٧	٣٧
١١٠	١٢	٤٠	١٧	–	٦٩
١٤٠	١٠	٨	–	–	١٨
المجموع	٢٢	٥٣	٥٣	٢٢	١٥٠

المطلوب:

أ – احسب معامل ارتباط بيرسون بين الاستهلاك والادخار

ب– أوجد معادلة انحدار الادخار على الاستهلاك وتنبأ بالادخار المتوقع عندما يكون الاستهلاك ٥٠٠ جنيه

جـ –احسب معامل ارتباط سبيرمان بطريقة الأقطار ذات الفروق المتساوية

د – احسب معامل التوافق

الباب الخامس

تحليل السلاسل الزمنية

Time Series Analysis

السلسلة الزمنية:

عبارة عن علاقة بين متغيرين ، أحدهما متغير مستقل وهو الزمن ولنرمز له بالرمز (س) ويعبر عنه بمجموعة من الفترات الزمنية المتتالية أو المتتابعة (سنوات أو شهور أو أسابيع أو أيام ...) ومتغير آخر تابع ولنرمز له بالرمز (ص) وهو غالباً ما يكون أحد المتغيرات الاقتصادية الهامة مثل:(الإنتاج – الصادرات – الواردات – المبيعات .....) أى أن:

ص = د (س)

وتستخدم السلسلة الزمنية التاريخية فى تحديد شكل الاتجاه العام للظاهرة مع التوقع بإمتداد هذا الاتجاه العام فى المستقبل القريب حتى يمكن التنبؤ بالقيم المختلفة للظاهرة مستقبلاً.

عناصر السلسلة الزمنية:

يهدف تحليل السلسلة الزمنية إلى التعرف على حركة وسلوك الظاهرة فى الماضى بعد تحديد عناصر أو مكونات السلسلة الزمنية والتغيرات التى تطرأ عليها أو تلازمها من حيث طبيعتها ومقدارها واتجاهها وتتلخص عناصر السلسلة الزمنية فيما يلى:

(١) الاتجاه العام Secular Trend

(٢) التغيرات الموسمية Seasonal Variations

(٣) التغيرات الدورية Cyclical Variations

(٤) التغيرات العرضية Irregular Variations

(١) الاتجاه العام: Secular Trend

الاتجاه العام هو المسار العام للسلسلة الزمنية وفقاً للبيانات التاريخية عن الظاهرة والذى يعبر عن حركة البيانات على مدار فترة طويلة فى الماضى والتى تبين الزيادة أو النقص أو الثبات من فترة لأخرى وهى التغيرات المنتظمة أو التى تبين عدم وجود أى علاقة أو اتجاه عام وهى تغيرات غير منتظمة ، وقد يكون الاتجاه العام خطى أو غير خطى ولكن ستقتصر دراستنا فى هذا الباب على الاتجاه العام الخطى.

(٢) التغيرات الموسمية: Seasonal Variations

وهى تغيرات منتظمة على فترات عادة أقل من سنة ، قد تكون يومية أو أسبوعية أو شهرية أو ربع سنوية أو نصف سنوية ، وعلى سبيل المثال فالمثلجات تباع فى موسم الصيف أكثر من المواسم الأخرى واستهلاك الكهرباء فى المنازل ليلاً أكثر من نهاراً وهكذا ....

(٣) التغيرات الدورية: Cyclical Variations

هى تغيرات منتظمة على فترات عادة أكثر من سنة مثل فترات الرواج والكساد وهى تتم على فترات طويلة قد تصل إلى ١٠ سنوات أو أكثر حيث تتوقف على الظروف الداخلية للدولة والظروف الخارجية المحيطة بها.

(٤) التغيرات العرضية: Irregular Variations

هى تغيرات غير منتظمة وغير متوقعة وتحدث نتيجة ظروف طارئة ومفاجئة مثل الحروب والزلازل والبراكين والفيضانات والأوبئة بحيث

يصعب التنبؤ بهذه التغيرات وتحديد حجمها ويطلق عليها عادةً التغيرات العشوائية.

نماذج تحليل السلاسل الزمنية:

يوجد عدة نماذج لتحليل السلاسل الزمنية عن طريق مكوناتها أو عناصرها الأربع السابقةومن أهمها:

١ – نموذج حاصل الجمع:

وبمقتضاه تتحدد قيمة الظاهرة عند أى نقطة زمنية بحاصل جمع القيمة الاتجاهية عند هذه النقطة مضافاً إليها قيم التغيرات الموسمية والتغيرات الدورية والتغيرات العرضية ، وهذه العلاقة تعنى أن قيمة العناصر الأربعة مستقلة لا تتأثر ولا تؤثر فى بعضها البعض.

٢ – نموذج حاصل الضرب:

وبمقتضاه تتحدد قيمة الظاهرة عند أى نقطة زمنية بحاصل ضرب العناصر الأربعة (القيمة الاتجاهية والتغيرات الموسمية والتغيرات الدورية والتغيرات العرضية) ، والتغير فى الاتجاه العام (العنصر الأول) هو الذى يتحدد بوحدات القياس الأصلية وباقى التغيرات (الموسمية والدورية والعرضية) تظهر كنسب مئوية من التغير العام فى الاتجاه العام (بدون وحدات قياس) وبالتالى تعتبر التغيرات الأربع متغيرات غير مستقلة تؤثر فى بعضها البعض ، ويعتبر نموذج حاصل الضرب هو الأكثر شيوعاً واستخداماً لأن نتائجه أكثر دقة.

وسنكتفى فيما يلى بدراسة طرق تحديد الاتجاه العام للسلسلة الزمنية (العنصر الأول) بالإضافة إلى دراسة تحليل التغيرات الموسمية (العنصر الثانى) كل على حدة أى دراسة كل عنصر على حدة مع عزل أو وقف تأثير تغيرات العناصر الأخرى.

طرق تقدير الاتجاه العام للسلسلة الزمنية:

يتم تقدير الاتجاه العام للسلسلة الزمنية بمجموعة من الطرق نلخص أهمها فيما يلى:

(١) الطريقة البيانية:

يتم تمثيل السنوات عادة على المحور الأفقى والقيم المختلفة للظاهرة على المحور الرأسى ، ويتم وضع أو تسجيل النقط التاريخية الفعلية للظاهرة على مدار الفترات الزمنية المختلفة وبتوصيل هذه النقط ببعضها البعض يظهر الشكل التاريخى للسلسلة الزمنية وعادة ما تكون سلسلة غير منتظمة ولتفادى الانكسارات المختلفة والقيم الشاذة الأخرى فى المنحنى التاريخى يتم تمهيد خط مستقيم أو منحنى باليد بحيث يمر الخط أو المنحنى بأغلب النقط المختلفة للظاهرة ويتوسط باقى النقط الأخرى على مسافات متساوية تقريباً بحيث يكون عدد النقط فوق أو على يمين الخط المستقيم أو المنحنى مساوياً تقريباً لعدد النقط أسفل أو على يسار الخط المستقيم أو المنحنى وهذه الطريقة بالرغم من أنها تمتاز بالسهولة إلا أنها تعتمد على مهارة الباحث بالرسم وتعطى نتائج مختلفة من شخص لآخر.

(٢) طريقة شبه المتوسطات (طريقة متوسطى نصفى السلسلة):

بمقتضاها يتم تقسيم بيانات السلسلة الزمنية إلى نصفين متتاليين ، ثم يتم حساب الوسط الحسابى لبيانات الظاهرة فى النصف الأول للسلسلة وأيضاً الوسط الحسابى للنصف الثانى من السلسلة ويتم وضع قيم الوسطين الحسابيين على الرسم البيانى ويسجل كل وسط حسابى فى مركز أو منتصف نصف السلسلة ، ثم يرسم خط مستقيم يمر بالوسطين الحسابيين فيتحدد خط الاتجاه العام ، وإذا كان عدد الفترات فردياً فيتم إهمال الفترة الوسطى أوالفترة الأولى أوالفترة الأخيرة وذلك حتى يصبح عدد الفترات زوجياً بحيث يتم تقسيمه إلى نصفين متساويين ، ويعيب هذه الطريقة أنها تعتمد على الأوساط الحسابية التى تتأثر بالقيم الشاذة وبالتالى يتأثر الخط المستقيم بهذه القيم الشاذة إذا كانت موجودة.

مثال:

فيما يلى بيان بالمبيعات السنوية بآلاف الجنيهات لإحدى المؤسسات التجارية خلال السنوات ٢٠٠٤ إلى ٢٠١٢

السنة	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢
المبيعات	٢٥	٥٠	٦٥	٨٠	١٠٠	١١٠	١٣٠	١٥٠	١٩٠

استخدم طريقة متوسطى نصفى السلسلة فى تحديد خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة

الحل:

نظراً لأن بيانات السلسلة الزمنية السابقة عن فترة ٩ سنوات وهو رقم فردى لذلك يمكن إهمال بيانات السنة الوسطى وهى سنة ٢٠٠٨

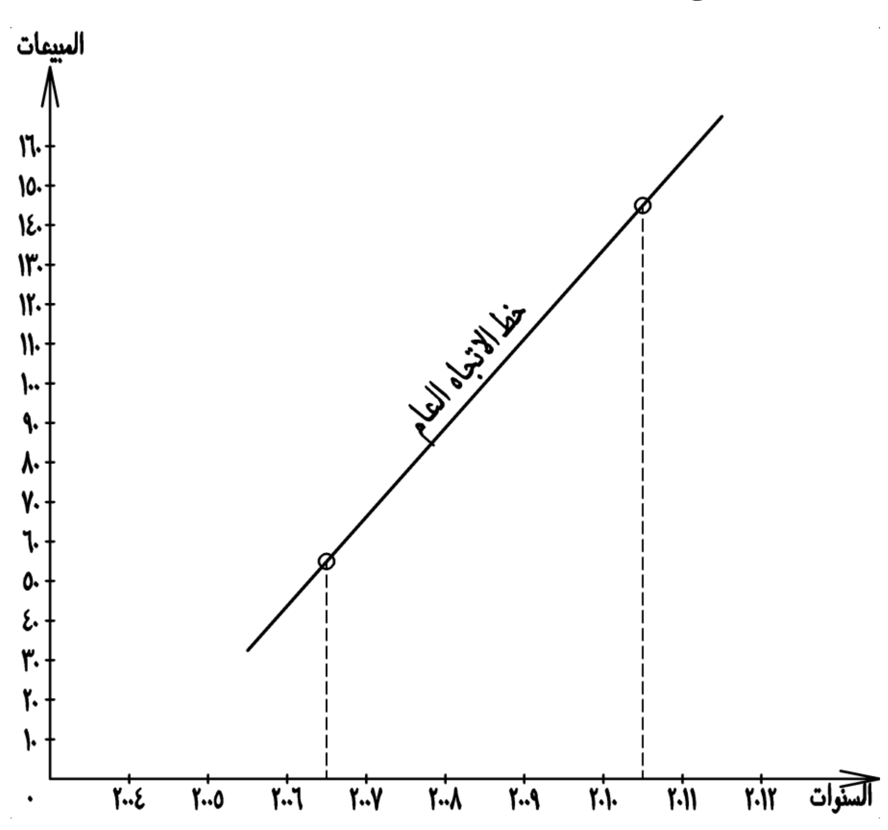
الوسط الحسابى البسيط لمبيعات السنوات الأربع الأولى

$$= \frac{٢٥+٥٠+٦٥+٨٠}{٤} = \frac{٢٢٠}{٤} = ٥٥$$

الوسط الحسابى البسيط لمبيعات السنوات الأربع الأخيرة

$$= \frac{١١٠+١٣٠+١٥٠+١٩٠}{٤} = \frac{٥٨٠}{٤} = ١٤٥$$

ويتم تسجيل الوسطين الحسابيين السابقين عل الرسم البيانى أمام منتصف كل فترة كما يلى:



(٣) طريقة المتوسطات المتحركة:

إذا كانت البيانات التاريخية التى تعبر عنها السلسلة الزمنية أو خط الاتجاه العام تتعرض لذبذبات أو تغيرات غير منتظمة تتم على فترات زمنية شبة ثابتة وللتغلب على هذه الذبذبات يمكن حساب الوسط الحسابى للبيانات التاريخية لفترة معينة ويسجل الوسط الحسابى فى منتصف الفترة ، ثم نحذف بيانات الوحدة الأولى داخل الفترة ونُدخل بدلاً منها بيانات الوحدة الأولى من الفترة التالية لفترة الذبذبة ثم نحسب وسط حسابى جديد متحرك ونكرر هذه العملية لباقى البيانات المتتالية أو المتتابعة وبالتالى يكون لدينا فى النهاية سلسلة جديدة تتكون من المتوسطات المتحركة وتسجل هذه المتوسطات المتحركة على الرسم البيانى وبالتوصيل بينها يتحدد خط أو منحنى الاتجاه العام للسلسلة.

ويؤخذ على هذه الطريقة أن عدد القيم الاتجاهية يكون أقل من عدد القيم الأصلية كما لا توجد هناك دالة رياضية يمكن استخدامها فى التنبؤ مستقبلاً.

(٤) طريقة المربعات الصغرى:

بمقتضاها يتم توفيق خط مستقيم يتوسط البيانات التاريخية للسلسلة الزمنية ويعتبر الخط الأمثل الذى يتوسط النقط هو الذى يعطى أقل مجموع مربعات للانحرافات بين القيم الأصلية للبيانات التاريخية والقيم الجديدة الاتجاهية على الخط المستقيم الممهد ، وتتحدد معادلة الخط المستقيم الذى يحقق الشرط السابق بالمعادلة التالية:

ص = أ س + ب

حيث ص المتغير التابع ، س تمثل دائماً الفترات ، أ معامل انحدار الخط المستقيم أى ميل الخط المستقيم الذى يتحدد بظل الزاوية التى يصنعها الخط المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، ب ثابت الانحدار وتمثل الجزء المقطوع من محور الصادات.

ويتم ايجاد قيم أ ، ب بحل المعادلتين التاليتين معاً:

- مجـــ ص = أ مجـــ س + ن ب
- مجـــ س ص = أ مجـــ $س^{٢}$ + ب مجـــ س

وبحل المعادلتين السابقتين معاً جبرياً يمكننا التوصل للقوانين التالية:

$$أ = \frac{ن \times مجـ س ص - مجـ س \times مجـ ص}{ن \times مجـ س^{٢} - (مجـ س)^{٢}}$$

$$ب = \overline{ص} - أ \overline{س}$$

$$= \frac{مجـ ص}{ن} - أ \times \frac{مجـ س}{ن}$$

<u>الطريقة المختصرة:</u>

عند تحديد نقطة الأصل (سنة الأساس أو الوسط الفرضى) وكانت هى السنة أو الفترة الوسطى للبيانات إذا كان عدد السنوات فردياً أو منتصف الفترتين المركزيتين للبيانات إذا كان عدد السنوات زوجياً وذلك حتى يصبح مجموع قيم س = صفر أى أن مجـــ س = صفر.

وبالتعويض عن مجـــ س = صفر فى القوانين السابقة يمكن تبسيطها إلى ما يلى:

$$أ = \frac{مجـ س ص}{مجـ س^{2}}$$

$$ب = \overline{ص}$$

$$= \frac{مجـ ص}{ن}$$

مثال (١):

فيما يلى بيان بكمية الإنتاج بالطن لإحدى المصانع عن السنوات ٢٠٠٧ إلى ٢٠١٣

السنة	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣
كمية الإنتاج	٤٠	٨٠	١٢٠	١٦٠	٢٠٠	٢٥٠	٢٧٠

حدد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة معتبراً سنة ٢٠٠٧ هى نقطة أصل (وسط فرضى) مع تحديد القيمة الاتجاهية والقيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام ثم تنبأ بالإنتاج عام ٢٠١٦

الحل:

السنة	ص	س	س ص	$س^2$	$\hat{ص}$	$\frac{ص}{\hat{ص}} \times ١٠٠$
٢٠٠٧	٤٠	٠	٠	٠	٤١,٢	٩٧٪
٢٠٠٨	٨٠	١	٨٠	١	٨٠,٨	٩٩٪
٢٠٠٩	١٢٠	٢	٢٤٠	٤	١٢٠,٤	٩٩٪
٢٠١٠	١٦٠	٣	٤٨٠	٩	١٦٠	١٠٠٪
٢٠١١	٢٠٠	٤	٨٠٠	١٦	١٩٩,٦	١٠٠,٢٪
٢٠١٢	٢٥٠	٥	١٢٥٠	٢٥	٢٣٩,٢	١٠٤,٥٪
٢٠١٣	٢٧٠	٦	١٦٢٠	٣٦	٢٧٨,٨	٩٧٪
المجموع	١١٢٠ مج ص	٢١ مج س	٤٤٧٠ مج س ص	٩١ مج $س^2$		

نفرض أن معادلة خط الاتجاه العام هى:

ص = أ س + ب

$$حيث\ أ = \frac{ن \times مجس ص - مجس \times مجص}{ن \times مجس^2 - (مجس)^2}$$

$$أ = \frac{٧ \times ٤٤٧٠ - ٢١ \times ١١٢٠}{٧ \times ٩١ - ٢١ \times ٢١} = ٣٩,٦$$

$$ب = \bar{ص} - أ \bar{س}$$

$$= \frac{مجص}{ن} - أ \times \frac{مجس}{ن} = \frac{١١٢٠}{٧} - ٣٩,٦ \times \frac{٢١}{٧} = ٤١,٢$$

∴ معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هى:

ص = ٣٩,٦ س + ٤١,٢

القيم الاتجاهية صَ̂:

القيم الاتجاهية للمتغير التابع ص ولنرمز لها بالرمز صَ̂ هى القيم الجديدة التى تم نقلها من القيم الأصلية (التاريخية) إلى خط الاتجاه العام ، وتنتج هذه القيم بالتعويض فى معادلة الاتجاه العام التالية:

صَ̂ = ٣٩,٦ س + ٤١,٢

ويتم التعويض فى هذه المعادلة عن س بالانحرافات من صفر إلى ٧ (وهى الانحرافات بين السنوات الأصلية ونقطة الأصل) وذلك للحصول على القيم الاتجاهية المقابلة للقيم الأصلية كما يلى:

عندما س = صفر:

فإن صَ̂ = ٣٩,٦ × صفر + ٤١,٢ = ٤١,٢

عندما س = ١:

فإن صَ̂ = ٣٩,٦ ×١ + ٤١,٢ = ٨٠,٨

عندما س = ٢:

فإن صَ̂ = ٣٩,٦ ×٢ + ٤١,٢ = ١٢٠,٤

وهكذا يتم التعويض عن س = ٣ ثم ٤ ثم ٥ ثم ٦ ثم ٧ وتسجل النتائج فى الجدول السابق فى عمود (صَ̂) كما يمكن إضافة أو جمع أ على أى قيمة اتجاهية لإيجاد القيمة الاتجاهية التالية وهكذا.

وللوصول للقيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام (القيم الاتجاهية المعدلة) ننسب القيم الأصلية للقيم الاتجاهية المناظرة ونحولها لنسبة مئوية

بالضرب فى ١٠٠ فتتحدد الخـــانة الأخـــيرة فى الجـــدول الســـابق

عمود ($\frac{ص}{\hat{ص}}$ × ١٠٠٪)

التنبؤ بالإنتاج عام ٢٠١٦

س = السنة المطلوبة – نقطة الأصل

= ٢٠١٦ – ٢٠٠٧ = ٩

∴ ص = ٣٩,٦ × ٩ + ٤١,٢ = ٣٩٧,٦ طن

حل آخر باستخدام الطريقة المختصرة:

سنقوم بإعادة حل المثال السابق بطريقة أخرى مختصرة وذلك بنقل نقطة الأصل أو الوسط الفرضى إلى السنة الوسطى وهى ٢٠١٠ كما يلى:

السنة	ص	س	س ص	$س^٢$	$\hat{ص}$	$\frac{ص}{\hat{ص}}$ × ١٠٠
٢٠٠٧	٤٠	٣-	١٢٠-	٩	٤١,٢	٩٧٪
٢٠٠٨	٨٠	٢-	١٦٠-	٤	٨٠,٨	٩٩٪
٢٠٠٩	١٢٠	١-	١٢٠-	١	١٢٠,٤	٩٩٪
٢٠١٠	١٦٠	صفر	صفر	صفر	١٦٠	١٠٠٪
٢٠١١	٢٠٠	١	٢٠٠	١	١٩٩,٦	١٠٠,٢٪
٢٠١٢	٢٥٠	٢	٥٠٠	٤	٢٣٩,٢	١٠٤,٥٪
٢٠١٣	٢٧٠	٣	٨١٠	٩	٢٧٨,٨	٩٧٪
المجموع	١١٢٠ مجـ ص	صفر مجـ س	١١١٠ مجـ س ص	٢٨ مجـ $س^٢$		

ونظراً لأن مجـــ س = صفر تختصر القوانين السابقة لإيجاد أ ، ب كما يلى:

أ = $\frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^2}$ = $\frac{١١٢٠}{٢٨}$ = ٣٩,٦

ب = $\bar{\text{ص}}$ = $\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$ = $\frac{١١٢٠}{٧}$ = ١٦٠

∴ ص = ٣٩,٦ س + ١٦٠

التنبؤ بالإنتاج عام ٢٠١٦

س = السنة المطلوبة – نقطة الأصل

= ٢٠١٦ – ٢٠١٠ = ٦

∴ ص = ٣٩,٦ × ٦ + ١٦٠ = ٣٩٧,٦ طن

وهى نفس الإجابة السابقة تماماً

وللوصول للقـيم الاتجاهية ($\hat{\text{ص}}$) يتم التعويض فى معادلة الاتجاه العام $\hat{\text{ص}}$ = ٣٩,٦ س + ١٦٠ عن س بالقيم من –٣ إلى +٣ ينتج العمود السادس $\hat{\text{ص}}$ وهو لا يختلف عما توصلنا إليه عند الحل بالطريقة المطولة وبالتالى لا يختلف العمود الأخير ($\frac{\text{ص}}{\hat{\text{ص}}}$ × ١٠٠)

مثال (٢):

حدد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية التالية ثم تنبأ بالصادرات المتوقعة عام ٢٠١٥

السنة	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣
الصادرات بالمليون ج	١٠	١٢	١٨	٢٠	٢٥	٣٢	٤٠	٥٠

الحل:

الطريقة المختصرة:

السنة	ص	س	$س^2$	س ص	$\hat{ص}$	$\frac{ص}{\hat{ص}} \times ١٠٠$
٢٠٠٦	١٠	-٧	٤٩	-٧٠	٦,٤٢	١٥٥,٧٦٪
٢٠٠٧	١٢	-٥	٢٥	-٦٠	١١,٩٨	١٠٠,١٧٪
٢٠٠٨	١٨	-٣	٩	-٥٤	١٧,٥٤	١٠٢,٦٢٪
٢٠٠٩	٢٠	-١	١	-٢٠	٢٣,١٠	٨٦,٨٥٪
٢٠١٠	٢٥	١	١	٢٥	٢٨,٦٦	٨٧,٢٣٪
٢٠١١	٣٢	٣	٩	٩٦	٣٤,٢٢	٩٣,٥١٪
٢٠١٢	٤٠	٥	٢٥	٢٠٠	٣٩,٧٨	١٠٠,٥٥٪
٢٠١٣	٥٠	٧	٤٩	٣٥٠	٤٥,٣٤	١١٠,٢٨٪
المجموع	٢٠٧ مج ص	صفر مج س	١٦٨ مج $س^2$	٤٦٧ مج س ص		

ملاحظات على الجدول السابق:

اعتبرنا نقطة الأصل (الوسط الفرضى) منتصف عامى ٢٠٠٩ ، ٢٠١٠ (السنتان المتوسطتان) وليكن حسابياً الوسط الفرضى هو ٢٠٠٩,٥ ، فكانت الانحرافات بين ٢٠٠٩,٥ وجميع السنوات الأخرى كما يلى:

السنة	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣
الانحرافات	-٣,٥	-٢,٥	-١,٥	-٠,٥	٠,٥	١,٥	٢,٥	٣,٥

وللتخلص من الكسور نضرب الانحرافات الكسرية السابقة فى الرقم ٢ فتصبح: -٧ ، -٥ ، -٣ ، -١ ، ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧

وبالتالى تصبح س = ٢ (السنة المطلوبة – نقطة الأصل)

وبفرض أن معادلة الاتجاه العام هى:

ص = أ س + ب

$$\text{حيث أ} = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^{٢}} = \frac{٤٦٧}{١٦٨} = ٢,٧٨$$

$$\text{ب} = \overline{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{٢٠٧}{٨} = ٢٥,٨٨$$

∴ ص = ٢,٧٨ س + ٢٥,٨٨

<u>التنبؤ بالإنتاج عام ٢٠١٥</u>

س = ٢ (السنة المطلوبة – نقطة الأصل)

= ٢ (٢٠١٥ – ٢٠٠٩,٥) = ١١

∴ ص = ٢,٧٨ × ١١ + ٢٥,٨٨ = ٥٦,٤٦ مليون جنيه

<u>الدليل الموسمى:</u>

تحديد خط الاتجاه العام فى ظل التقلبات الموسمية:

كثير من الظواهر تخضع لتقلبات موسمية منتظمة على فترات أقل من سنة ويمكن التنبؤ بها وحسابها بدقة استناداً للتحرك المنتظم لهذه التقلبات على مدار فترات زمنية طويلة فى الماضى ، وهذه التقلبات قد تكون يومية أو أسبوعية أو شهرية أو ربع سنوية أو نصف سنوية ، وللأخذ فى

الاعتبار تأثير هذه التقلبات على خط الاتجاه العام يمكن توضيحها من خلال المثال التالى:

<u>مثال:</u>

فيما يلى قيمة الإنتاج بالألف جنيه لإحدى الشركات الصناعية خلال الفترات الربع سنوية للأعوام ٢٠١٢ ، ٢٠١٣ ، ٢٠١٤

السنة	٢٠١٢				٢٠١٣				٢٠١٤			
الربع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
الانتاج	١٢	٢٠	١٥	٣٠	١٥	٣٥	٢٥	٤٠	٢٥	٤٠	٣٣	٥٠

المطلوب:

١. تحديد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة
٢. حساب القيم الاتجاهية والقيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام
٣. إعداد الدليل الموسمى
٤. التنبؤ بقيمة الإنتاج الربع سنوى المتوقع خلال عام ٢٠١٥

<u>الحل:</u>

<u>تحديد معادلة خط الاتجاه العام:</u>

السنة	الربع	ص	س	س ص	$س^2$	$\hat{ص}$	$\frac{ص}{\hat{ص}}$ × ١٠٠
٢٠١٢	الأول	١٢	٠	٠	٠	١٣,٩١	٨٦,٢٦٩٪
	الثانى	٢٠	١	٢٠	١	١٦,٥٣٢	١٢٠,٩٧٧٪
	الثالث	١٥	٢	٣٠	٤	١٩,١٥٤	٧٨,٣١٣٪
	الرابع	٣٠	٣	٩٠	٩	٢١,٧٧٦	١٣٧,٧٦٦٪
٢٠١٣	الأول	١٥	٤	٦٠	١٦	٢٤,٣٩٨	٦١,٤٨٪
	الثانى	٣٥	٥	١٧٥	٢٥	٢٧,٠٢	١٢٩,٥٣٤٪
	الثالث	٢٥	٦	١٥٠	٣٦	٢٩,٦٤٢	٨٤,٣٤٠٪
	الرابع	٤٠	٧	٢٨٠	٤٩	٣٢,٢٦٤	١٢٣,٩٧٧٪
٢٠١٤	الأول	٢٥	٨	٢٠٠	٦٤	٣٤,٨٨٦	٧١,٦٦٢٪
	الثانى	٤٠	٩	٣٦٠	٨١	٣٧,٥٠٨	١٠٦,٦٤٤٪
	الثالث	٣٣	١٠	٣٣٠	١٠٠	٤٠,١٣	٨٢,٢٣٣٪
	الرابع	٥٠	١١	٥٥٠	١٢١	٤٢,٧٥٢	١١٦,٩٥٤٪
المجموع		٣٤٠ مج ص	٦٦ مج س	٢٢٤٥ مج س ص	٥٠٦ مج $س^2$		

ملاحظة:

اعتبرنا الربع الأول لعام ٢٠١٢ هو نقطة الأصل (الوسط الفرضى) وتم طرحه من باقى الفتـــرات الربع سنوية فكانت الانحرافات على الترتيب : ٠ ، ١ ، ٢ ، ..... ، ١١ كما يمكن الحل بالطريقة المختصرة باعتبار منتصف المسافة بين الربع الثانى والثالث لعام ٢٠١٣ هى نقطة الأصل (الوسط الفرضى) ونظراً لأن عدد الفترات الربع سنوية عدد زوجى (١٢ ربع) فتكون الانحرافات على الترتيب: -١١ ، -٩ ، -٧ ، ..... ، +١١

وبفرض أن معادلة خط الاتجاه العام هى:

ص = أ س + ب

$$\text{حيث أ} = \frac{\text{ن} \times \text{مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن} \times \text{مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$= \frac{١٢ \times ٢٢٤٥ - ٦٦ \times ٣٤٠}{١٢ \times ٥٠٦ - ٦٦ \times ٦٦}$$

$$= \frac{٢٦٩٤٠ - ٢٢٤٤٠}{٦٠٧٢ - ٤٣٥٦} = \frac{٤٥٠٠}{١٧١٦} = ٢,٦٢٢$$

$$\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ}\ \bar{\text{س}}$$

$$= \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} - \text{أ} \times \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{٣٤٠}{١٢} - ٢,٦٢٢ \times \frac{٦٦}{١٢}$$

$$= ٢٨,٣٣٣ - ١٤,٤٢٣ = ١٣,٩١$$

∴ معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هى:

ص = ٢,٦٢٢ س + ١٣,٩١

<u>تحديد القيمة الاتجاهية $\hat{\text{ص}}$:</u>

بالتعويض فى معادلة خط الاتجاه العام $\hat{\text{ص}}$ = ٢,٦٢٢ س + ١٣,٩١ عن س بالانحرافات من ٠ ، ١ ، ٢ ، .... إلى ١١ على التوالى نجد أن $\hat{\text{ص}}$ هى ١٣,٩١ ، ١٦,٥٣٢ ، ١٩,١٥٤ ، ..... إلى ٤٢,٧٥٢

إعداد الدليل الموسمى:

يتكون الدليل الموسمى من القيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام (المعدلة) على أساس وضع رقم واحد متوسط أمام كل ربع (الوسط الحسابى البسيط للقيم الاتجاهية المخلصة) كما يلى:

القيم الاتجاهية / الربع	القيمة الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام ٢٠١٢ ٪	٢٠١٣ ٪	٢٠١٤ ٪	مجموع القيمة الاتجاهية	الدليل الموسمى ٪
الأول	٨٦,٢٦٩	٦١,٤٨	٧١,٦٦٢	٢١٩,٤١١	٧٣,١٣٧
الثانى	١٢٠,٩٧٧	١٢٩,٥٣٤	١٠٦,٦٤٤	٣٥٧,١٥٥	١١٩,٠٥٢
الثالث	٧٨,٣١٣	٨٤,٣٤	٨٢,٢٣٣	٢٤٤,٨٨٦	٨١,٦٢٩
الرابع	١٣٧,٧٦٦	١٢٣,٩٧٧	١١٦,٩٥٤	٣٧٨,٦٩٧	١٢٦,٢٣٢
المجموع					٤٠٠,٠٥

حيث مجموع الدليل الموسمى = ١٠٠٪ × عدد الفترات فى السنة

= ١٠٠٪ × ٤ = ٤٠٠٪

وفى حالة اختلاف المجموع الفعلى فى هذا المثال عن ٤٠٠٪ فيتم إجراء تعديل للقيم عن طريق معامل تصحيح أو تعديل وذلك بقسمة ٤٠٠٪ ÷ المجموع الفعلى أى أن:

$$\text{معامل تصحيح الدليل الموسمى} = \frac{٤٠٠ \%}{٤٠٠,٥ \%} = ٠,٩٩٩٨٧٥$$

الدليل الموسمى المعدل:

الربع	الدليل الموسمى المعدل ٪	الدليل الموسمى المعدل المطلق
الأول	٧٣,١٣٧ × ٠,٩٩٩٨٧٥ = ٧٣,١٢٨	٠,٧٣١٢٨
الثانى	١١٩,٠٥٢ × ٠,٩٩٩٨٧٥ = ١١٩,٠٣٧	١,١٩٠٣٧
الثالث	٨١,٦٢٩ × ٠,٩٩٩٨٧٥ = ٨١,٦١٩	٠,٨١٦١٩
الرابع	١٢٦,٢٣٢ × ٠,٩٩٩٨٧٥ = ١٢٦,٢١٦	١,٢٦٢١٦
المجموع	٤٠٠	٤

$$\text{ويتحدد الدليل الموسمى المعدل المطلق} = \frac{\text{الدليل الموسمى المعدل}}{١٠٠}$$

التنبؤ بقيمة الانتاج الربع سنوى المتوقع عام ٢٠١٥

الربع	الانتاج المتوقع عام ٢٠١٥ ص^ = (٢,٦٢٢ س + ١٣,٩١) × الدليل الموسمى المعدل المطلق
الأول	ص^ = (٢,٦٢٢ × ١٢ + ١٣,٩١) × ٠,٧٣١٢٨ = ٣٣,١٨١
الثانى	ص^ = (٢,٦٢٢ × ١٣ + ١٣,٩١) × ١,١٩٠٣٧= ٥٧,١٣٣
الثالث	ص^ = (٢,٦٢٢ × ١٤ + ١٣,٩١) × ٠,٨١٦١٩ = ٤١,٣١٤
الرابع	ص^ = (٢,٦٢٢ × ١٥ + ١٣,٩١) × ١,٢٦٢١٦ = ٦٧,١٩٧

ملاحظة: تم التعويض عن س بالانحرافات بين الفترات الربع سنوية لعام ٢٠١٥ ونقطة الأصل وهى الربع الأول لعام ٢٠١٢ أى بالانحرافات ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥

تمارين على الباب الخامس

(١) البيان التالى يبين الأرباح السنوية الصافية بآلاف الجنيهات لإحدى الشركات:

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦
الأرباح	١٣٥,٢	١٤٨,٣	١٦٤,٩	٢٠١,٣	٢٤٥	٢٩٣	٣٥٠

المطلوب:

أ – حدد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة

ب– حدد القيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام

ج – تنبأ بصافى الأرباح عام ٢٠٠٧ ، عام ٢٠١٢

(٢) البيان التالى يمثل المبيعات السنوية الصافية بآلاف الجنيهات لإحدى الشركات:

السنة	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨
المبيعات	٣٤٠	٣٦٥	٤٠٣	٤٤٦	٥٠٨	٥٧٠	٦٢٤	٦٩٠

المطلوب:

أ – حدد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة

ب– حدد القيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام

ج – تنبأ بالمبيعات السنوية المتوقعة عام ٢٠١١ ، عام ٢٠١٢

(٣) فيما يلى بيان بالواردات من المواد الخام لإحدى الصناعات الثقيلة بالمليون جنيه:

السنة	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠
الواردات	١٢٥	١٤٠	١٦٨	١٥٠	١٧٥	١٨٥	٢٢٠	٢٠٠	٢٤٠

المطلوب:

أ - استخدم طريقة متوسطى نصفى السلسلة فى تحديد الاتجاه العام بيانياً

ب- استخدم طريقة المتوسطات المتحركة على أساس ٣ سنوات ثم على أساس ٤ سنوات ثم على أساس ٦ سنوات فى تحديد الاتجاه العام بيانياً

(٤) فيما يلى بيان بالمبيعات الربع سنوية بملايين الجنيهات لإحدى الشركات الصناعية خلال عامى ٢٠١٣ ، ٢٠١٤:

	٢٠١٣				٢٠١٤			
الربع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
المبيعات	٦٥	٩٥	٤٥	١٤٥	٨٥	١٢٠	٦٥	١٧٠

المطلوب:

أ - تحديد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة

ب- تحديد القيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام

ج- إعداد الدليل الموسمى

د - احسب المبيعات الربع سنوية المتوقعة خلال عام ٢٠١٦

الباب السادس
الأرقام القياسية
Index Numbers

الرقم القياسى:

رقم يعبر عن التغير فى ظاهرة معينة بين فترتين مختلفتين أو بين مكانين مختلفين ، ويساعد الرقم القياسى متخذى القرار فى المشروعات المختلفة فى تحليل البيانات التاريخية الخاصة بالوظائف المختلفة داخل المشروع وفى رسم الخطط ووضع السياسات ، ومن ثم الرقابة والمتابعة للنتائج المختلفة داخل المشروع.

ويشمل الرقم القياسى بيانات تاريخية عن نشاط أو وظيفة أو سلعة معينة أو محموعة متجانسة من السلع والخدمات تدخل فى تركيب الأرقام القياسية.

والرقم القياسى مقياس نسبى لا يتأثر بوحدات القياس ويتوقف على الاختيار المناسب للأساس سواء كان فترة زمنية أو مكان حيث يشترط أن يتميز الأساس بالاستقرار الاقتصادى والظروف الطبيعية ، وتعتبر الأرقام القياسية للأسعار والكميات هى الأكثر شيوعاً واستخداماً.

وستتم دراستنا فى هذا الباب بالتطبيق على الأسعار والكميات مع استخدام الرموز التالية:

الفترة / المتغير	فترة الأساس	فترة المقارنة
الأسعار	ع.	ع١
الكميات	ك.	ك١

أنواع الأرقام القياسية:

أولاً: المناسيب:

(١) المناسيب المستقلة البسيطة:

أ – منسوب السعر = $م_ع = \frac{ع_1}{ع_0} \times ١٠٠$ Price Relative

ب– منسوب الكمية = $م_ك = \frac{ك_1}{ك_0} \times ١٠٠$ Quantity Relative

جـ – منسوب القيمة = $م_ق = \frac{ق_1}{ق_0} \times ١٠٠$ Value Relative

مثال:

السلعة	الأسعار		الكميات	
	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٥	٢٠٠٦
قمح	٨٠	١٦٠	٥	٨
قطن	٦٠	٩٠	٦	٩
ذرة	٤٠	٥٠	٤	٧

المطلوب:

حساب مناسيب الأسعار ومناسيب الكميات ومناسيب القيمة لكل سلعة مستقلة

الحل:

مناسيب الأسعار:

$$م_{ع_١} = \frac{١٦٠}{٨٠} \times ١٠٠ = ٢٠٠٪$$

$$م_{ع_٢} = \frac{٩٠}{٦٠} \times ١٠٠ = ١٥٠٪$$

$$م_{ع_٣} = \frac{٥٠}{٤٠} \times ١٠٠ = ١٢٥٪$$

مناسيب الكميات:

$$م_{ك_١} = \frac{٨}{٥} \times ١٠٠ = ١٦٠٪$$

$$م_{ك_٢} = \frac{٩}{٦} \times ١٠٠ = ١٥٠٪$$

$$م_{ك_٣} = \frac{٧}{٤} \times ١٠٠ = ١٧٥٪$$

مناسيب القيم:

$$م_{ق_١} = \frac{١٦٠ \times ٨}{٨٠ \times ٥} \times ١٠٠ = ٣٢٠٪$$

$$م_{ق_٢} = \frac{٩٠ \times ٩}{٦٠ \times ٦} \times ١٠٠ = ٢٢٥\%$$

$$م_{ق_٣} = \frac{٥٠ \times ٧}{٤٠ \times ٤} \times ١٠٠ = ٢١٨,٧٥\%$$

(٢) المناسيب التجميعية البسيطة:

أ – الوسط الحسابى البسيط للمناسيب:

$$\text{الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار} = \frac{\text{مجـ}\, م_{ع}}{ن}$$

$$\text{الوسط الحسابى لمناسيب الكميات} = \frac{\text{مجـ}\, م_{ك}}{ن}$$

$$\text{الوسط الحسابى لمناسيب القيم} = \frac{\text{مجـ}\, م_{ق}}{ن}$$

حل المثال السابق:

$$\text{الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار} = \frac{٢٠٠+١٥٠+١٢٥}{٣} = ١٥٨,٣\%$$

$$\text{الوسط الحسابى لمناسيب الكميات} = \frac{١٦٠+١٥٠+١٧٥}{٣} = ١٦١,٧\%$$

$$\text{الوسط الحسابى لمناسيب القيم} = \frac{٣٢٠+٢٢٥+٢١٨.٧٥}{٣} = ٢٥٤,٥٨\%$$

ب- الوسط الهندسى البسيط للمناسيب:

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار= $\sqrt[ن]{م_{ع_١} \times م_{ع_٢} \times ... \times م_{ع_ن}}$

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الكميات= $\sqrt[ن]{م_{ك_١} \times م_{ك_٢} \times ... \times م_{ك_ن}}$

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب القيم= $\sqrt[ن]{م_{ق_١} \times م_{ق_٢} \times ... \times م_{ق_ن}}$

ولإيجاد الجذر النونى لأياً من الأوساط الهندسية البسيطة السابقة يتم بالآلة الحاسبة وذلك برفع الجذر النونى كما يلى:

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار= $\left(م_{ع_١} \times م_{ع_٢} \times \cdot\cdot \times م_{ع_ن}\right)^{\frac{١}{ن}}$

ويتم إيجاد المقدار السابق باستخدام الآلة الحاسبة وتسجيل الأُس بعد الضغط على الزر x^y أو يتم حساب الوسط الهندسى البسيط باللوغاريتمات حيث:

$$لو\ هـ = \frac{١}{ن}\left(لو\ م_{ع_١} + لو\ م_{ع_٢} + \cdot\cdot + لو\ م_{ع_ن}\right)$$

ويتم إيجاد اللوغارتيمات عن طريق الجداول أو باستخدام الآلة الحاسبة بالضغط على الزر LOG ثم الناتج النهائى يسجل على الآلة ولإلغاء لو نضغط على الزر 10^x

حل المثال السابق:

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار= $\sqrt[٣]{٢٠٠ \times ١٥٠ \times ١٢٥}$

لو هـ = $\frac{١}{٣}$ (لو ٢٠٠ + لو ١٥٠ + لو ١٢٥)

= $\frac{١}{٣}$ (٢,٣٠١٠٣ + ٢,١٧٦٠٩ + ٢,٠٩٦٩١)

= ٢,١٩١٣٤

∴ هـ = ١٥٥,٣٦٪

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الكميات= $\sqrt[٣]{١٦٠ \times ١٥٠ \times ١٧٥}$

لو هـ = $\frac{١}{٣}$ (لو ١٦٠ + لو ١٥٠ + لو ١٧٥)

= $\frac{١}{٣}$ (٢,٢٠٤١٢ + ٢,١٧٦٠٩ + ٢,٢٤٣٠٤)

= ٢,٢٠٧٧٥

∴ هـ = ١٦١,٣٤٣٪

الوسط الهندسى البسيط لمناسيب القيم = $\sqrt[3]{٣٢٠ \times ٢٢٥ \times ٢٨١,٧٥}$

لو هـ = $\frac{١}{٣}$ (لو ٣٢٠ + لو ٢٢٥ + لو ٢٨١,٧٥)

= $\frac{١}{٣}$ (٢,٥٠٥١٥ + ٢,٣٥٢١٨ + ٢,٣٣٩٩٥)

= ٢,٣٩٩٠٩

∴ هـ = ٢٥٠,٦٦٤ ٪

(٣) المناسيب التجميعية المرجحة:

أ – الوسط الحسابى المرجح للمناسيب:

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار = $\frac{مج م_{ع} \times و}{مج و}$

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الكميات = $\frac{مج م_{ك} \times و}{مج و}$

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب القيم = $\frac{مج م_{ق} \times و}{مج و}$

حيث و عبارة عن الوزن أو الترجيح

حل المثال السابق:

احسب الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار بالكميات فى سنة الأساس

الحل:

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار بالكميات فى سنة الأساس ٢٠٠٥

$$= \frac{٤ \times ١٢٥ + ٦ \times ١٥٠ + ٥ \times ٢٠٠}{٤+٦+٥}$$

$$= \frac{٥٠٠+٩٠٠+١٠٠٠}{٤+٦+٥} = \frac{٢٤٠٠}{١٥}$$

= ١٦٠ ٪

كما يمكن حساب الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة أو بالقيم فى سنة الأساس أو سنة المقارنة.

كما يمكن ترجيح مناسيب الأسعار بعدد العمال أو بساعات العمل وهكذا..

ب- الوسط الهندسى المرجح للمناسيب:

الوسط الهندسى المرجح لمناسيب الأسعار

$$= \sqrt[مجو]{م_{ع_١}^{و_١} \times م_{ع_٢}^{و_٢} \times \ldots \times م_{ع_ن}^{و_ن}}$$

الوسط الهندسى المرجح لمناسيب الكميات

$$= \sqrt[مجو]{م_{ك_١}^{و_١} \times م_{ك_٢}^{و_٢} \times \ldots \times م_{ك_ن}^{و_ن}}$$

الوسط الهندسى المرجح لمناسيب القيم

$$= \sqrt[\text{مجو}]{م_{ق_1}^{و_1} \times م_{ق_2}^{و_2} \times \ldots \times م_{ق_ن}^{و_ن}}$$

ولإيجاد الجذر النونى لأياً من الأوساط الهندسية المرجحة السابقة يتم بالآلة الحاسبة وذلك برفع الجذر النونى وباستخدام اللوغاريتمات كما يلى:

الوسط الهندسى المرجح لمناسيب الأسعار:

$$= \frac{1}{\text{مجو}} \left(و_1 \, لو\, م_{ع_1} + و_2 \, لو\, م_{ع_2} + \cdots + و_ن \, لو\, م_{ع_ن} \right)$$

<u>حل المثال السابق:</u>

احسب الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار المرجح بكميات سنة الأساس ٢٠٠٥

<u>الحل:</u>

الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأسعار بالكميات فى سنة الأساس ٢٠٠٥

$$= \sqrt[\text{مجو}]{م_{ع_1}^{و_1} \times م_{ع_2}^{و_2} \times \ldots \times م_{ع_ن}^{و_ن}}$$

$$= \sqrt[15]{٢٠٠^{٥} \times ١٥٠^{٦} \times ١٢٥^{٤}}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{١}{١٥} (\text{٥ لو ٢٠٠} + \text{٦ لو ١٥٠} + \text{٤ لو ١٢٥})$$

$$= \frac{١}{١٥} (٥ \times ٢,٣٠١٠٣ + ٦ \times ٢,١٧٦٠٩ + ٤ \times ٢,٠٩٦٩١)$$

$$= ٢,١٩٦٦٢$$

$$\therefore \text{هـ} = ١٥٧,٢٦١\%$$

ثانياً: الأرقام القياسية التجميعية:

(١) الرقم القياسى التجميعى البسيط:

$$\text{الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار} = \frac{\text{مج ع}_{١}}{\text{مج ع}_{٠}} \times ١٠٠$$

$$\text{الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات} = \frac{\text{مج ك}_{١}}{\text{مج ك}_{٠}} \times ١٠٠$$

$$\text{الرقم القياسى التجميعى البسيط للقيم} = \frac{\text{مجق}_{١}}{\text{مجق}_{٠}} \times ١٠٠$$

(٢) الأرقام القياسية التجميعية المرجحة:

سنقوم بالتطبيق على الأرقام القياسية التجميعية المرجحة للأسعار فقط ويستطيع الدارس التطبيق بالمثل على الكميات أو القيم.

أ – الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس:

$$\text{رقم لاسبير Laspeyer's Index} = \frac{\text{مجـ}\ ع_{١}\ ك_{٠}}{\text{مجـ}\ ع_{٠}\ ك_{٠}} \times ١٠٠$$

ب– الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة:

$$\text{رقم باش Pasche Index} = \frac{\text{مجـ}\ ع_{١}\ ك_{١}}{\text{مجـ}\ ع_{٠}\ ك_{١}} \times ١٠٠$$

جـ – الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بالوسط الحسابى لكميتى الأساس والمقارنة (أو مجموع كميتى الأساس والمقارنة) أو المرجح بالوسط الهندسى:

رقمى مارشال و ادجورث Marshal – Edgeworth Index

- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بالوسط الحسابى لكميتى الأساس والمقارنة (أو بمجموع الكميتين) =

$$\frac{\text{مجـ}\ ع_{١}\left(ك_{٠} + ك_{١}\right)}{\text{مجـ}\ ع_{٠}\left(ك_{٠} + ك_{١}\right)} \times ١٠٠$$

- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بالوسط الهندسى لكميتى الأساس والمقارنة =

$$\frac{\text{مجـ}\ ع_{١}\sqrt{\left(ك_{٠}\ ك_{١}\right)}}{\text{مجـ}\ ع_{٠}\sqrt{\left(ك_{٠}\ ك_{١}\right)}} \times ١٠٠$$

د – الوسط الحسابى البسيط لرقمى لاسبير و باش (رقم دوربش وبالى) :(Dorpish – Pally Index)

$$= \left\{ \frac{\text{مج ع}_1 \text{ ك}_0}{\text{مج ع}_0 \text{ ك}_0} \times ١٠٠ + \frac{\text{مج ع}_1 \text{ ك}_1}{\text{مج ع}_0 \text{ ك}_1} \times ١٠٠ \right\} \div ٢$$

هـــ – الوسط الهندسى البسيط لرقمى لاسبير و باش (رقم فيشر الأمثل) :(Irving Fisher Index – Ideal Index)

$$= \sqrt{\frac{\text{مج ع}_1 \text{ ك}_0}{\text{مج ع}_0 \text{ ك}_0} \times \frac{\text{مج ع}_1 \text{ ك}_1}{\text{مج ع}_0 \text{ ك}_1}} \times ١٠٠$$

مثال:

فيما يلى أسعار وكميات مجموعة من السلع فى سنتى ٢٠١١ ، ٢٠١٢

الغلة	٢٠١١		٢٠١٢	
	أسعار	كميات	أسعار	كميات
قطن	٥٠	١٠	٧٥	١٢
قمح	٣٠	٨	٥٠	٩
ذرة	١٠	٥	١٦	٧

المطلوب:

حساب الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار والأرقام التجميعية المرجحة للأسعار.

الحل:

الغلة	ع.	ك.	ع١	ك١	ع.ك.	ع.ك١	ع١ك.	ع١ك١
قطن	٥٠	١٠	٧٥	١٢	٥٠٠	٦٠٠	٧٥٠	٩٠٠
قمح	٣٠	٨	٥٠	٩	٢٤٠	٢٧٠	٤٠٠	٤٥٠
ذرة	١٠	٥	١٦	٧	٥٠	٧٠	٨٠	١١٢
المجموع	٩٠	٢٣	١٤١	٢٨	٧٩٠	٩٤٠	١٢٣٠	١٤٦٢

الغلة	ع.(ك.+ك١)	ع١(ك.+ك١)	ع. √ك.ك١	ع١ √ك.ك١
قطن	١١٠٠	١٦٥٠	٥٤٧,٧	٨٢١,٦
قمح	٥١٠	٨٥٠	٢٥٤,٦	٤٢٤,٣
ذرة	١٢٠	١٩٢	٥٩,٢	٩٤,٧
المجموع	١٧٣٠	٢٦٩٢	٨٦١,٥	١٣٤٠,٦

١- الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار $= \frac{\text{مجـ ع١}}{\text{مجـ ع.}} \times ١٠٠$

$= \frac{١٤١}{٩٠} \times ١٠٠ = ١٥٦,٦٧\%$

٢- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس

(رقم لاسبير):

$= \frac{\text{مجـ ع١ ك.}}{\text{مجـ ع. ك.}} \times ١٠٠ = \frac{١٢٣٠}{٧٩٠} \times ١٠٠ = ١٥٥,٧٠\%$

٣- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (رقم پاش):

$$= \frac{\text{مجـ } \text{ع}_{١} \text{ك}_{١}}{\text{مجـ } \text{ع}_{٠} \text{ك}_{١}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٤٦٢}{٩٤٠} \times ١٠٠ = ١٥٥,٥٣\%$$

٤- الرقم التجميعى للأسعار المرجح بمجموع كميتى الأساس والمقارنة (الوسط الحسابى البسيط - رقم مارشال و إدجورث)

$$= \frac{\text{مجـ } \text{ع}_{١} (\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١})}{\text{مجـ } \text{ع}_{٠} (\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١})} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٦٩٢}{١٧٣٠} \times ١٠٠ = ١٥٥,٦٠\%$$

٥- الرقم القياسى التجميعى للأسعار المرجح بالوسط الهندسى البسيط لكميتى الأساس والمقارنة (رقم مارشال و إدجورث)

$$= \frac{\text{مجـ } \text{ع}_{١} \sqrt{\text{ك}_{٠} \text{ك}_{١}}}{\text{مجـ } \text{ع}_{٠} \sqrt{\text{ك}_{٠} \text{ك}_{١}}} \times ١٠٠ = \frac{١٣٤٠.٥}{٨٦١.٤٤} \times ١٠٠ = ١٥٥,٦١٢\%$$

٦- الوسط الحسابى لرقمى لاسپير و پاش (رقم دورپش وپالى)

$$= \left\{ \frac{مجـ ع_١ ك_٠}{مجـ ع_٠ ك_٠} \times ١٠٠ + \frac{مجـ ع_١ ك_١}{مجـ ع_٠ ك_١} \times ١٠٠ \right\} \div ٢$$

$$= \frac{١٥٥.٧٠ + ١٥٥.٥٣}{٢} = ١٥٥,٦٢\%$$

٧- الوسط الهندسى البسيط لرقمى لاسپير و پاش (الرقم القياسى الأمثل لفيشر)

$$= \sqrt{\frac{مجـ ع_١ ك_٠}{مجـ ع_٠ ك_٠} \times \frac{مجـ ع_١ ك_١}{مجـ ع_٠ ك_١}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{١٥٥,٧٠ \times ١٥٥,٥٣} = ١٥٥,٦١\%$$

ثالثاً: الأرقام القياسية للسلسلة الزمنية:

إذا كان لدينا سلسلة زمنية لإحدى الظواهر الاقتصادية والمطلوب تحليل هذه السلسلة باستخدام الأرقام القياسية ، لذلك سنقوم أولاً بتحديد سنة الأساس المناسبة وفى هذا الصدد نكون بصدد نوعين من الأساس:

(١) الأساس الثابت:

بمقتضاه نختار سنة واحدة طبيعية خالية من أى ظروف اجتماعية أو سياسية أو اقتصادية أو غير عادية مثل (الحروب والثورات والزلازل والأوبئة ...) وتعتبر سنة الأساس ثابتة لجميع سنوات السلسلة وليس

شرطاً أن تكون هذه السنة هى أقدم سنوات السلسلة ، ومن ثم نقوم بحساب مناسيب مستقلة لقيمة الظاهرة فى أى سنة منسوبة لسنة الأساس المحددة مقدماً.

(٢) الأساس المتحرك:

بمقتضاه ننسب كل سنة إلى سابقتها كأساس متحرك وذلك لبيان التطور من سنة لأخرى أى أن الأساس يتغير باستمرار وليس هناك شروط لطبيعة هذا الأساس ، وتفيد هذه الطريقة فى الدراسة المقارنة بين السنوات الحديثة لذلك هى تعالج مشكلة القدم فى البيانات ، ويطلق على هذه الطريقة اسم مناسيب السلسلة.

مثال:

السلسلة الزمنية التالية تبين أسعار إحدى السلع على مدار السنوات من ٢٠٠٥ إلى ٢٠٠٩

السنوات	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩
الأسعار	١٢٠	١٥٠	١٩٠	٢٥٠	٣٢٠

المطلوب: حساب مناسيب الأسعار للسلسلة الزمنية السابقة على أساسين:

١- معتبراً سنة ٢٠٠٥ أساس ثابت لجميع السنوات

٢- الأساس المتحرك

الحل:

١- مناسيب الأسعار باعتبار سنة ٢٠٠٥ أساس ثابت لجميع السنوات:

$$م_{٢٠٠٥/٢٠٠٥} = \frac{١٢٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ١٠٠\%$$

$$م_{٢٠٠٥/٢٠٠٦} = \frac{١٥٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ١٢٥\%$$

$$م_{٢٠٠٥/٢٠٠٧} = \frac{١٩٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ١٥٨,٣\%$$

$$م_{٢٠٠٥/٢٠٠٨} = \frac{٢٥٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ٢٠٨,٣٣\%$$

$$م_{٢٠٠٥/٢٠٠٩} = \frac{٣٢٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ٢٦٦,٦٧\%$$

ملاحظة: الرقم القياسى فى سنة الأساس يساوى دائماً ١٠٠٪

ونقارن باقى الأرقام القياسية بنسبة ١٠٠٪ لتحديد الزيادة أو النقص أو الثبات.

<u>٢- الأساس المتحرك</u>

$$م_{٢٠٠٥/٢٠٠٦} = \frac{١٥٠}{١٢٠} \times ١٠٠ = ١٢٥\%$$

$$م_{٢٠٠٦/٢٠٠٧} = \frac{١٩٠}{١٥٠} \times ١٠٠ = ١٢٦,٦٧\%$$

$$م_{٢٠٠٧/٢٠٠٨} = \frac{٢٥٠}{١٩٠} \times ١٠٠ = ١٣١,٥٨\%$$

$$م_{٢٠٠٨/٢٠٠٩} = \frac{٣٢٠}{٢٥٠} \times ١٠٠ = ١٢٨\%$$

اختبارات الأرقام القياسية:

(١) اختبار الانعكاس فى الزمن (العكس الزمنى)

فى هذا الاختبار نستبدل سنة الأساس بسنة المقارنة أى نستبدل دليل المعاملات (٠) مع (١)

ومن خصائص الرقم القياسى الجديد هو الرقم الذى يتوافر فيه الشرط التالى:

الرقم القياسى × البديل الزمنى للرقم القياسى = ١

ونجد أن هذا الاختبار ينطبق على الرقمين التاليين فقط:

أ- الرقم التجميعى البسيط للأسعار = $\frac{مجـ ع_{١}}{مجـ ع_{٠}} \times ١٠٠$

البديل الزمنى للرقم التجميعى البسيط للأسعار = $\frac{مجـ ع_{٠}}{مجـ ع_{١}} \times ١٠٠$

∴ الرقم القياسى × بديله الزمنى = $\frac{مجـ ع_{١}}{مجـ ع_{٠}} \times \frac{مجـ ع_{٠}}{مجـ ع_{١}} = ١$

ب- الرقم القياسى لفيشر= $\sqrt{\frac{مجـ ع_{١} ك_{٠}}{مجـ ع_{٠} ك_{٠}} \times \frac{مجـ ع_{١} ك_{١}}{مجـ ع_{٠} ك_{١}}} \times ١٠٠$

البديل الزمنى للرقم القياسى لفيشر $= \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ ع_{0}\ ك_{1}}{\text{مجـ}\ ع_{1}\ ك_{1}} \times \frac{\text{مجـ}\ ع_{0}\ ك_{0}}{\text{مجـ}\ ع_{1}\ ك_{0}}} \times ١٠٠$

∴ الرقم القياسى × بديله الزمنى

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ ع_{1}\ ك_{0}}{\text{مجـ}\ ع_{0}\ ك_{0}} \times \frac{\text{مجـ}\ ع_{1}\ ك_{1}}{\text{مجـ}\ ع_{0}\ ك_{1}} \times \frac{\text{مجـ}\ ع_{0}\ ك_{1}}{\text{مجـ}\ ع_{1}\ ك_{1}} \times \frac{\text{مجـ}\ ع_{0}\ ك_{0}}{\text{مجـ}\ ع_{1}\ ك_{0}}} = ١$$

<u>(٢) اختبار الانعكاس فى المعامل (العكس المعاملى)</u>

فى هذا الاختبار نستبدل الأسعار مع الكميات ، أى نستبدل المعاملات (ع) مع (ك)

ومن خصائص الرقم القياسى الجيد هو الرقم الذى يتوافر فيه الشرط التالى:

الرقم القياسى × البديل المعاملى للرقم القياسى = الرقم القياسى للقيمة وينطبق هذا الاختبار على رقم فيشر فقط حيث:

الرقم القياسى لفيشر $= \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ ع_{1}\ ك_{0}}{\text{مجـ}\ ع_{0}\ ك_{0}} \times \frac{\text{مجـ}\ ع_{1}\ ك_{1}}{\text{مجـ}\ ع_{0}\ ك_{1}}} \times ١٠٠$

البديل المعاملى للرقم القياسى لفيشر $= \sqrt{\frac{\text{مجـ}\ ك_{1}\ ع_{0}}{\text{مجـ}\ ك_{0}\ ع_{0}} \times \frac{\text{مجـ}\ ك_{1}\ ع_{1}}{\text{مجـ}\ ك_{0}\ ع_{1}}} \times ١٠٠$

∴ الرقم القياسى × بديله المعاملى

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ك}_{٠}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ك}_{١}} \times \frac{\text{مجـ ك}_{١}\text{ع}_{٠}}{\text{مجـ ك}_{٠}\text{ع}_{٠}} \times \frac{\text{مجـ ك}_{١}\text{ع}_{١}}{\text{مجـ ك}_{٠}\text{ع}_{١}}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{مجـ ك}_{١}\text{ع}_{١}}{\text{مجـ ك}_{٠}\text{ع}_{٠}}\right)^{٢}}$$

$$= \frac{\text{مجـ ك}_{١}\text{ع}_{١}}{\text{مجـ ك}_{٠}\text{ع}_{٠}} = \frac{\text{مجـ ق}_{١}}{\text{مجـ ق}_{٠}} \quad \text{(منسوب القيمة)}$$

لذلك اعتبر الرقم القياسى لفيشر هو الرقم الأمثل من بين الأرقام القياسية الأخرى لانطباق اختبارى الإنعكاس فى الزمن والإنعكاس فى المعامل على هذا الرقم.

<u>بعض الأرقام القياسية الهامة:</u>

تحرص الدول المختلفة على حساب وتسجيل بعض الأرقام القياسية الهامة وينوط بهذا الدور فى جمهورية مصر العربية الجهاز المركزى للتعبئة العامة والإحصاء ، واستخدام هذه الأرقام فى دراسة بعض الظواهر الاقتصادية والاجتماعية العامة والتى تفيد الدولة والمؤسسات الاقتصادية المختلفة فى التخطيط والتحليل والمتابعة ومن أهم هذه الأرقام الرقم القياسى لنفقة المعيشة والرقم القياسى للأجور والرقم القياسى للقوة الشرائية للنقود والرقم القياسى لأسعار التجزئة والرقم القياسى لأسعار الجملة والرقم القياسى للإنتاج الصناعى.

(١) الرقم القياسى لنفقة المعيشة: Cost of Living Index

ويطلق عليه أحياناً الرقم القياسى لأسعار المستهلكين ويتكون هذا الرقم من مجموعة من السلع والخدمات التى يحتاجها الأفراد للمعيشة خلال فترة معينة ويتم إعداد رقم للحضر وآخر للريف أو عدة أرقام تفصيلية على مستوى المناطق أو المحافظات المختلفة للدولة وتتغير تركيبة هذا الرقم كل فترة من الزمن ويحدد الرقم النمط الإستهلاكى للأسر المختلفة على شكل نسب مئوية أو أوزان لكل بند من بنود نفقة المعيشة مع عمل رقم قياسى تجميعى مرجح داخل كل بند لأسعار مجموعة السلع والخدمات التى يتكون منها ذلك البند وتكون هذه البنود سلة السلع والخدمات الاستهلاكية.

ويقيس الرقم القياسى لنفقة المعيشة التغير الذى يطرأ على نفقة معيشة الأفراد نتيجة التغير فى مستويات الأسعار ، ويستخدم هذا الرقم فى تحريك الأجور داخل كثير من الدول لتتلاءم مع التغير فى تكلفة المعيشة كما يستفاد منه فى قياس مرونة الطلب على السلع الاستهلاكية المختلفة.

(٢) الرقم القياسى للأجور: Wages Index

يتكون من الأجور النقدية والعينية للقطاعات والأنشطة المختلفة المنتظمة داخل الدولة وفقاً لأعداد العاملين وساعات العمل فى كل قطاع أو نشاط ، والرقم القياسى الناتج يحسب لكل قطاع وعلى مستوى الدولة ويطلق عليه الرقم القياسى للأجر النقدى وهو يختلف تماماً من الرقم القياسى للأجر الحقيقى والذى يقيس التغير الحقيقى فى مستويات المعيشة ويحسب كما يلى:

$$\text{الرقم القياسى للأجور الحقيقية} = \frac{\text{الرقم القياسى للأجور النقدية}}{\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة}} \times ١٠٠$$

مثال:

البند / السنة	الأجور بالألف	نفقة المعيشة بالألف
٢٠٠٠	٢٤٠٠	١٣٢٠
٢٠١٠	٣٩٠٠	٢٦٤٠

المطلوب: قياس التغير فى الأجر الحقيقى

الحل:

$$\text{الرقم القياسى للأجور النقدية} = \frac{٣٩٠٠}{٢٤٠٠} \times ١٠٠ = ١٦٢,٥ \%$$

$$\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة} = \frac{٢٦٤٠}{١٣٢٠} \times ١٠٠ = ٢٠٠ \%$$

$$\text{الرقم القياسى للأجر الحقيقى} = \frac{\text{الرقم القياسى للأجور النقدية}}{\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٦٢,٥}{٢٠٠} \times ١٠٠ = ٨١,٢٥ \%$$

ويقارن الرقم القياسى للأجر الحقيقى بنسبة ١٠٠ ٪ ، إذا كان أقل يكون هناك نقص فى الدخل الحقيقى وبالتالى نقص فى مستوى المعيشة وإذا زاد عن ١٠٠٪ يكون هناك زيادة فى الدخل الحقيقى وبالتالى زيادة فى مستوى المعيشة.

وفى هذا المثال يعتبر مستوى المعيشة انخفض بنسبة ١٨,٧٥ ٪

(٣) الرقم القياسى للقوة الشرائية للنقود:

Purchasing Power of Money Index

هو مؤشر للقوة الشرائية الحقيقية للنقود وبديهى أنه يتأثر بالرقم القياسى للأسعار فكلما ارتفعت الأسعار مع ثبات الأجور كلما انخفضت القوة الشرائية للنقود والعكس صحيح ويتحدد الرقم القياسى للقوة الشرائية للنقود بمقلوب الرقم القياسى للأسعار.

$$\text{الرقم القياسى للقوة الشرائية للنقود} = \frac{١}{\text{الرقم القياسى للأسعار}} \times ١٠٠$$

فعلى سبيل المثال إذا كان الرقم القياسى للأسعار ٢٠٠ ٪ وبفرض ثبات الأجور فإن:

$$\text{الرقم القياسى للقوة الشرائية للنقود} = \frac{١}{٢٠٠} \times ١٠٠ = ٥٠ \%$$

أى أن القوة الشرائية للنقود انخفضت ٥٠٪

(٤) الرقم القياسى لأسعار الجملة:

Whole Sale Price Index

يقيس التغيرات التى تحدث فى أسعار السلع المتداولة فى سوق الجملة وذلك بعد تقسيمها لمجموعات متجانسة ويتم استخدام الوسط الحسابى المرجح أو الوسط الهندسى المرجح لمناسيب أسعار مجموعة السلع ويتم الترجيح عادة بأسعار عدد معين من السلع لكل مجموعة.

(٥) الرقم القياسى للإنتاج الصناعى:

Industrial Production Index

يقيس التغيرات التى تطرأ على أسعار الانتاج الصناعى لكل نوع من المنتجات الصناعية على حدة وللنشاط الصناعى ككل كما يحسب رقم قياسى لحجم أو كمية الانتاج لكل نوع على حدة وأفضل طريقة هى الوسط الحسابى المرجح أو الوسط الهندسى المرجح للمناسيب ويتم الترجيح بعدد العمال أو حجم الأموال المستثمرة فى كل صناعة.

وبالمثل يمكن إعداد أرقام قياسية للإنتاج الزراعى والبترول والتعدين وهذه الأرقام مؤشرات لدرجة النمو الاقتصادى للدولة.

تمارين على الباب السادس

(١) فيما يلى بيان بأسعار سلعة معينة خلال الأعوام من ٢٠٠٦ : ٢٠١٣

العام	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣
السعر	٢٠,٤	٢٢,٥	٢٦	٢٩,٣	٣٥	٤٠,٢	٥٣,٦	٧٢,٩

المطلوب:

–حساب الأرقام القياسية لمناسيب الأسعار معتبراً عام ٢٠٠٦ أساس ثابت

– حساب الأرقام القياسية لمناسيب الأسعار على الأساس المتحرك

(٢) فيما يلى بيان بأسعار وكميات مجموعة من السلع الزراعية خلال عامى ٢٠٠٥ ، ٢٠١٠

السلعة	الأسعار		الكميات	
	٢٠٠٥	٢٠١٠	٢٠٠٥	٢٠١٠
قطن	٦٥	٨٣	١٢٥	١٦٤
قمح	٢٨	٤٥	١١٠	١٣٥
ذرة	٣٥	٥٣	١٦٠	١٩٠
قصب سكر	١٢	١٨	٥٥	٧٥
شعير	٩	١٧	٢٥	٤٠

المطلوب:

أ – حساب مناسيب الأسعار والوسط الحسابى البسيط والوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار ثم الوسط الحسابى المرجح والوسط الهندسى المرجح للأسعار بكميات سنة الأساس

ب- الرقم التجميعى البسيط للأسعار

جـ - الرقم التجميعى البسيط للأسعار المرجح بكميات الأساس والمرجح بكميات المقارنة

د - الرقم القياسى الأمثل لفيشر

هـ - الرقم التجميعى للأسعار المرجح بالوسط الحسابى لكميتى الأساس والمقارنة والرقم المرجح بالوسط الهندسى لكميتى الأساس والمقارنة

(٣) فيما يلى بيان بمتوسط الأجر الشهرى وعدد العاملين لمجموعة من الشركات خلال عامى ٢٠٠٦ ، ٢٠٠٩

الشركة	٢٠٠٦		٢٠٠٩	
	الأجر	عدد العاملين	الأجر	عدد العاملين
أ	١٥٠	١٥	٢١٠	١٨
ب	٣٠٠	٨	٤٥٠	١٢
جـ	٢١٠	٢٥	٢٨٠	٢٥
د	١٨٠	١٢	٢٥٠	١٥
هـ	٤٠٠	٧	٥٥٠	١٠

المطلوب:

أ - حساب مناسيب الأجر ومناسيب عدد العمال ثم الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الأجور بعدد عمال سنة الأساس

ب- حساب الرقم القياسى الأمثل للأجور (رقم فيشر)

جـ -حساب الوسط الحسابى لرقمى لاسبير و باش

د – إذا كان الرقم القياسى لنفقة المعيشة لسنة ٢٠٠٩ بالنسبة لسنة ٢٠٠٦ يبلغ ١٤٠٪ احسب الرقم القياسى للأجر الحقيقى باستخدام الرقم القياسى الأمثل لفيشر

(٤) فيما يلى سلسلة زمنية للأرقام القياسية للمواد الخام لإحدى الصناعات خلال السنوات من ٢٠٠٤ : ٢٠١٠

السنوات	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠
الأرقام القياسية للمواد الخام	١٠٠	١٢٠	١٣٥	١٥٢	١٧٥	١٩٤	٢١٥

المطلوب:

- انقل الأساس الثابت من عام ٢٠٠٤ إلى عام ٢٠٠٦
- احسب الأرقام القياسية على الأساس المتحرك ثم احسب الوسط الحسابى البسيط لمناسيب السلسلة

(٥) فيما يلى بيان بأنواع الحاسبات والكميات المباعة منها فى عامى ٢٠٠٤ ، ٢٠١٤

أنواع الحاسبات	أ	ب	جـ	د	هـ
الكميات المباعة ٢٠٠٤	١١٠	٨٥	٦٠	٢٠٠	١٧٥
الكميات المباعة ٢٠١٤	١٧٥	١٥٠	١١٠	٣٠٠	٤٥٠
سعر الحاسب	٣٠٠٠	٢٥٠٠	٤٦٠٠	٥٠٠٠	٢١٠٠

المطلوب:

أ – حساب الرقم القياسى التجميعى المرجح للكميات المباعة بالأسعار

ب– حساب الوسط الحسابى المرجح لمناسيب الكميات المباعة

جـ – حساب الوسط الهندسى المرجح لمناسيب الكميات المباعة

(٦) فيما يلى الأرقام القياسية لنفقة المعيشة والأجور باعتبار سنة ٢٠٠٠ أساس ثابت

السنة	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠
الرقم القياسى لنفقة المعيشة	٢١٠	٢٣٥	٢٨٠	٣١٠	٣٨٠	٤٥٠
الرقم القياسى للأجور	١٢٠	١٤٠	١٧٥	٢٠٠	٢٥٠	٣٢٠

المطلوب:

المقارنة بين مستويات المعيشة خلال السنوات السابقة

(٧) فيما يلى بيان بأسعار وكميات مجموعة من المعادن خلال عامى ٢٠٠٥ ، ٢٠١٠

المعادن	الأسعار		الكميات	
	٢٠٠٥	٢٠١٠	٢٠٠٥	٢٠١٠
حديد	٨٠	١٠٠	٨٥	١١٥
نحاس	٦٥	٧٥	٥٠	٦٥
رصاص	١٥	٢٣	١٠	١٢
قصدير	١٨٠	٢٧٠	٥	٨
صفيح	٨	١٣	١٥٠	٢١٠

المطلوب:

أ – الأرقام القياسية التجميعية البسيطة للأسعار وللكميات معاً

ب– الرقم القياسى الأمثل للأسعار واستخدامه فى حساب الرقم القياسى للقوة الشرائية للنقود

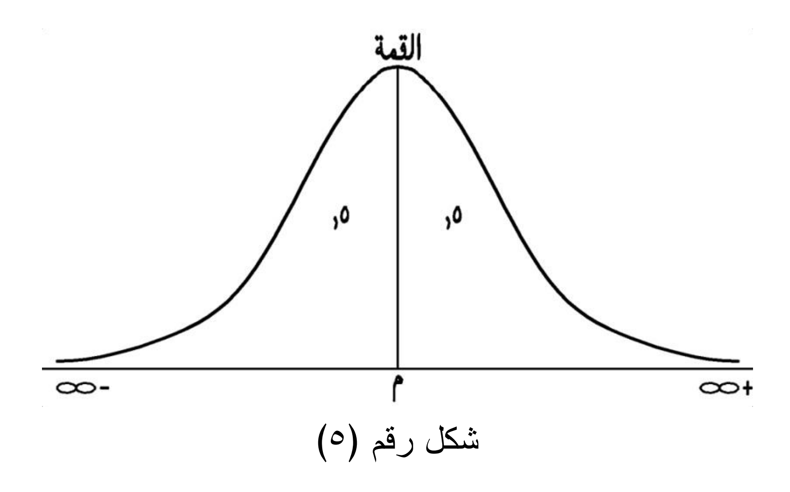
الباب السابع
التوزيع الطبيعى
Normal Distribution

مقدمة:

يعتبر التوزيع الطبيعي أهم التوزيعات شائعة الاستخدام في حياتنا بصفة عامة وأهم التوزيعات المتصلة بصفة خاصة وذلك من ناحية مدى توافره وانطباقه علي معظم الظواهر في مختلف المجالات كما يتضح ذلك من علم الإحصاء التطبيقي, ويعتبر التوزيع الطبيعي هو الأساس لفهم وتطبيق معظم الاختبارات الإحصائية المعروفة والمستخدمة في نظرية العينات, كما يحول إلي التوزيع الطبيعي بالتقريب العديد من التوزيعات الأخرى المنفصلة والمتصلة بالإضافة إلي اشتقاق العديد من التوزيعات الهامة الأخرى منه, وحتى في المجتمعات التي لا تخضع للتوزيع الطبيعي إذا أخذنا من أحد هذه المجتمعات عدة عينات كاملة نجد أن متوسطات هذه العينات تكون توزيع طبيعي (نظرية النهاية المركزية)

Central Limit Theorem

والتوزيع الطبيعي يطلق عليه التوزيع المعتدل أو المستمر أو المتماثل حيث يأخذ شكل ناقوس له قمة واحدة والعمود الواصل من القمة للقاعدة (المحور الأفقي) يقسم المنحني إلي نصفين متماثلين ومنطبقين تماماً حيث أن معدل انحدار المنحني إلي أسفل من الجانبين متساوي تماماً ويأخذ منحني التوزيع الطبيعي الشكل التالي:



شكل رقم (٥)

خصائص التوزيع الطبيعي:

١- العمود الواصل من القمة إلي المحور الأفقي يقسم الشكل إلي نصفين متطابقين تماماً ويحدد علي المحور الأفقي مركز التوزيع (م)

٢- طرفي التوزيع يمتدان من - ∞ إلي + ∞

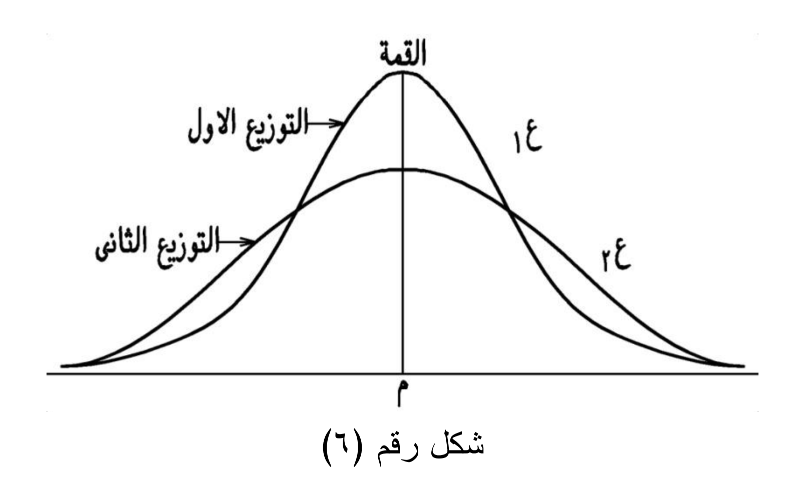
٣- في التوزيع الطبيعي تتساوي جميع المتوسطات الوسط الحسابي والوسيط والمنوال و الوسط الهندسي و الوسط التوافقي وتحدد قيمها جميعاً عند مركز التوزيع (م)

٤- كلما اختلف أو ابتعد الوسط الحسابي والمتمركز دائماً في وسط التوزيع عن الوسيط أو المنوال كلما أبتعد المنحني عن التماثل وكان ملتوياً وكلما زاد هذا الفرق كلما كان المنحني أكثر إلتواءاً وإذا كان الوسيط ثم المنوال علي يسار الوسط الحسابي كان الفرق بين الوسط الحسابي والوسيط أو المنوال موجباً والإلتواء جهة اليمين وعلي العكس تماماً كلما كان الوسيط ثم المنوال علي يمين الوسط الحسابي كان الفرق بين الوسط الحسابي والوسيط أو المنوال سالباً والإلتواء

جهة اليسار, لذلك تستخدم الفروق بين كلا مـــن الوســـط الحســـابي والوسيط أو المنوال كمقاييس للإلتواء وإذا انعدمت هذه الفــروق أي كانت صفراً وذلك عند تطابق قيم جميع المتوسطات كـــان المنحنـــي معتدلاً أو متماثلاً, أي إلتواء التوزيع الطبيعي = صفراً

٥- عند حساب الاحتمالات في التوزيع الطبيعي المتصل لابد أن تحسب علي أساس مسافة أو مساحة معينة متصلة يمكن أن يأخذها المتغيــر العشوائي س وليس علي أساس نقطة محددة يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي س كما في المتغيرات المنفصلة.

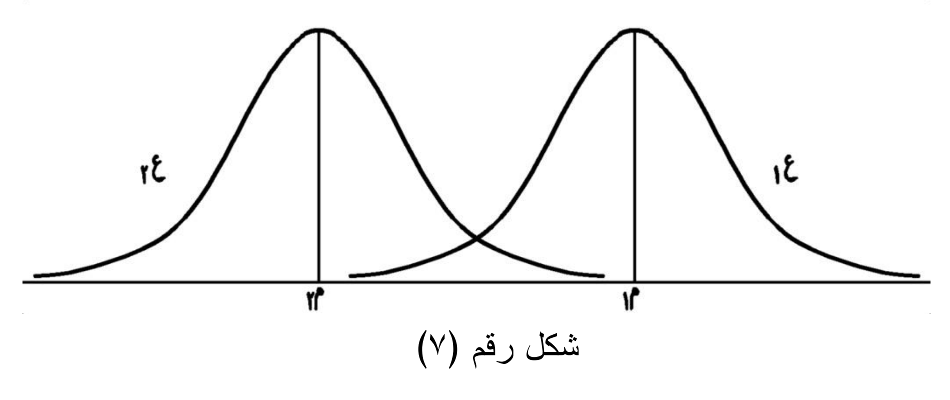
٦ - تتحدد معالم التوزيع الطبيعي بالوسط الحسابي والانحراف المعياري م,ع ويختلف شكل التوزيع من ناحية التفرطح أو التدبب حسب قيمة الانحراف المعياري كما يتضح من الشكل التالي:



شكل رقم (٦)

يتضح من الشكل السابق أن مركز التوزيعين (م) متساوي ولكن المنحنيين غير متطابقين لاختلاف الانحراف المعياري لكل منهما حيث نجد أن ع٢ > ع١

لذلك فالتوزيع الأول مدبب والتوزيع الثاني مفرطح أي أنه كلما قل التشتت (الانحراف المعياري) كلما كان التوزيع أقل تفرطحاً وأكثر تدبباً والعكس صحيح كلما زاد التشتت كلما كان التوزيع أكثر تفرطحاً وأقل تدبباً.



شكل رقم (٧)

يتضح من الشكل السابق أن مركزى التوزيع مختلفان م١ ≠ م٢ أما تشتت التوزيعان متساوي أن ع١ = ع٢ لذلك يتطابق الشكلان تماماً.

٧- المساحة المحصورة بين المنحني الطبيعي والمحور الأفقي تساوي واحد صحيح وتنتج من إيجاد التكامل المحدود لدالة كثافة احتمال هذا التوزيع من -∞ إلي +∞ , وبالتالي فإن المساحة المحصورة بين المنحني والمحور الأفقي علي يمين المركز (م) تمثل ٥٠٪ من المساحة الكلية والمساحة المحصورة بين المنحني والمحور الأفقي علي يسار المركز (م) تمثل ٥٠٪ من المساحة الكلية نتيجة التماثل

انظر شكل رقم (٥) ويتضح ذلك من تكامل الدالة المتصلة التالية كما يلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} . dx = 1$$

ويمكن ترجمة هذه الدالة للرموز العربية التالية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{١}{ع\sqrt{٢ط}} \times هـ^{-\frac{١}{٢}\left(\frac{س-م}{ع}\right)^{٢}} \times د\,س = ١$$

حيث هـ = ٢,٧١٨٢٨ أساس اللوغاريتم الطبيعي

$$ط = \frac{٢٢}{٧} = ٣,١٤٢٨٥٧$$

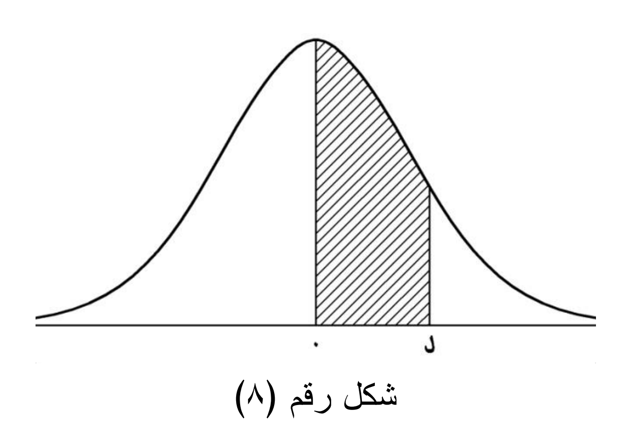
<u>بند (١) دالة كثافة احتمال التوزيع:</u>

يتم حساب الاحتمالات المختلفة للمتغير العشوائي المتصل س باستخدام الدالة التالية:

$$ل(س) = \frac{١}{ع\sqrt{٢ط}} \times هـ^{-\frac{١}{٢}\left(\frac{س-م}{ع}\right)^{٢}}$$

واضح من الدالة السابقة أن الاحتمالات تتوقف علي معالم التوزيع الطبيعي (م , ع) وتحتاج لحسابات طويلة و معقدة و لذلك افترضنا وجود توزيع طبيعي خاص نمطي يطلق عليه التوزيع الطبيعي

المعياري (Standard Normal Distribution) له خصـــائص معينـــة نوجزها فيما يلي:



شكل رقم (٨)

١ – التوزيع الطبيعي المعياري متوسطة = صفر وانحرافه المعياري =١

أي أن : م = صفر , ع = ١

٢ – المنحني متماثل حول المركز صفر وإلتوائه = صفر وتفرطحه = ٣

٣ – المساحة المحصورة بين المنحني والمحور الأفقي = ١

وبالتعويض في دالة كثافة احتمال التوزيع الطبيعي السابقة للوصول لدالة كثافة احتمال التوزيع الطبيعي المعياري أو النمطي عند م = صفر ، ع = ١ نجد أن :

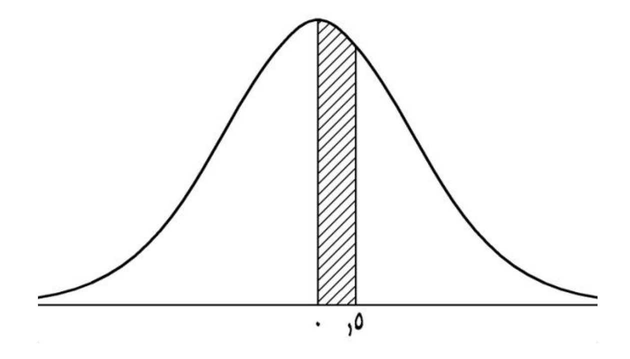
$$ل(س) = \frac{١}{\sqrt{٢ط}} \times هـ^{-\frac{١}{٢}(س)^{٢}}$$

وقد تم إعداد جداول إحصائية باستخدام التكامل المحدود للدالـــة الســـابقة لحساب المساحات المحصورة بين المنحني والمحور الأفقي (الاحتمالات) حيث أعد الجدول ليعطي المساحات (الاحتمالات) من صفر إلي (د) حيث (د) درجة معيارية موجبة في التوزيع الطبيعـــي المعيـــاري أو النمطـــي ويتضح طريقة استخدام هذا الجدول من الأمثلة التالية:

مثال (١):

احسب: ل (٠ ≥ د ≥ ٠,٥)

الحل



ل (٠ ≥ د ≥ ٠,٥) = ٠,١٩١٥ وهي القيمة المقابلة لـــ د = ٠,٥

ملاحظة هامة:

إذا كتبت علاقات المتباينات السابقة بدون علامة يساوي كما يلي:

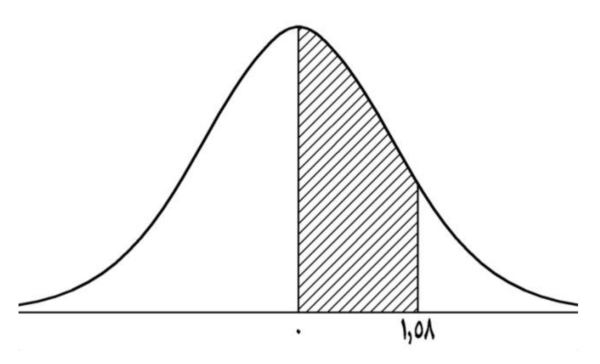
ل (٠ < د < ٠,٥) يمكن حسابها في التوزيع المتصل كما لو كان هناك علامة يساوي تماماً حيث تعطي نفس المعني.

أي أن ل (٠ < د < ٠,٥) = ل (٠ ≥ د ≥ ٠,٥)

مثال (٢):

احسب: ل (٠ ≥ د ≥ ١,٥٨)

الحل:

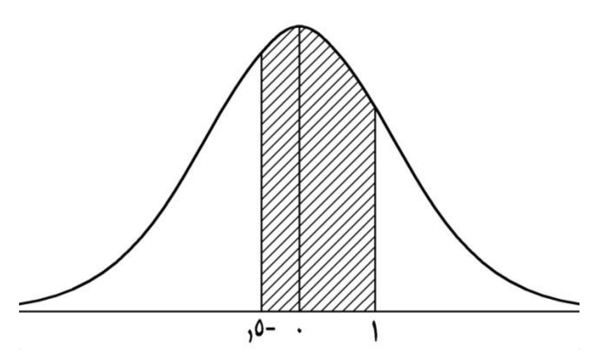


ل (٠ ≥ د ≥ ١,٥٨) = ٠,٤٤٢٩

مثال (٣):

احسب: ل (– ٠,٥ ≥ د ≥ ١)

الحل:



ل (– ٠,٥ ≥ د ≥ ١) = ل (٠ ≥ د ≥ ١) + ل (٠ ≥ د ≥ ٠,٥)

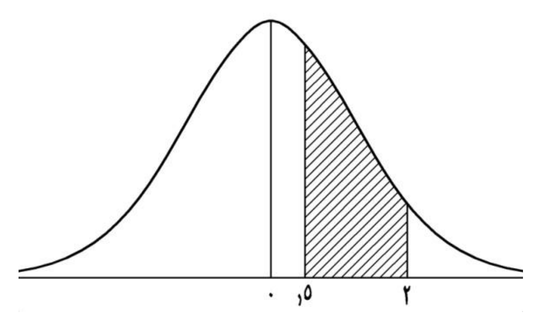
= ٠,٣٤١٣ + ٠,١٩١٥ = ٠,٥٣٢٨

ملاحظة: ل (٠ ≥ د ≥ ٠,٥) = ل (– ٠,٥ ≥ د ≥ ٠) لتماثل المساحات في نصفي الشكل.

مثال (٤):

احسب: ل (٠,٥ ≤ د ≤ ٢)

الحل:



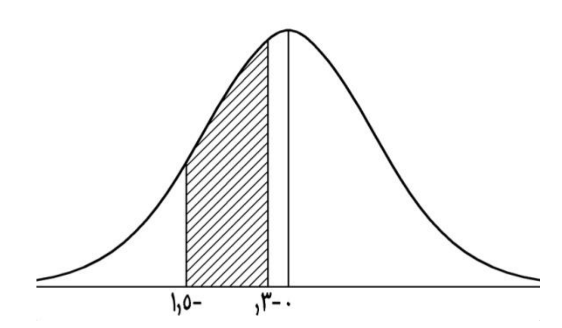
ل (٠,٥ ≤ د ≤ ٢) = ل (٠ ≤ د ≤ ٢) − ل (٠ ≤ د ≤ ٠,٥)

= ٠,٤٧٧٢ − ٠,١٩١٥ = ٠,٢٨٥٧

مثال (٥):

احسب: ل (−١,٥ ≤ د ≤ −٠,٣)

الحل:



من التماثل لنصفي الشكل نجد أن:

ل (−١,٥ ≤ د ≤ −٠,٣) = ل (٠,٣ ≤ د ≤ ١,٥)

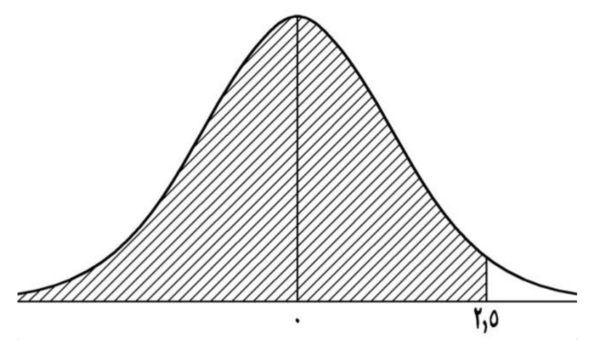
= ل(٠ ≤ د ≤ ١,٥)− ل(٠ ≤ د ≤ ٠,٣)

= ٠,٤٣٣٢ − ٠,١١٧٩ = ٠,٣١٥٣

مثال (٦):

احسب : ل (د ≥ ٢,٥)

الحل:



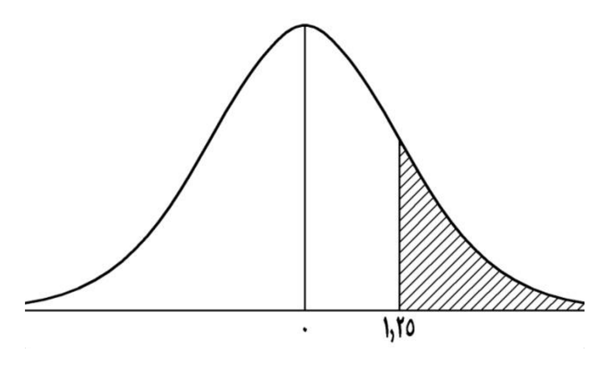
ل (د ≥ ٢,٥) = ل (٠ ≥ د ≥ ٢,٥) + ٠,٥

= ٠,٤٩٣٨ + ٠,٥ = ٠,٩٩٣٨

مثال (٧):

احسب: ل (د ≤ ١,٢٥)

الحل:



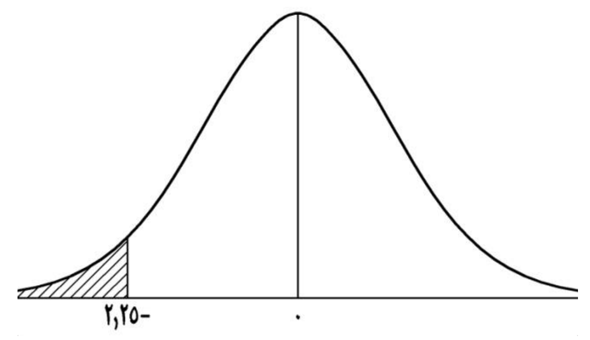
ل (د ≤ ١,٢٥)= ٠,٥ – ل (٠ ≥ د ≥ ١,٢٥)

= ٠,٥ – ٠,٣٩٤٤ = ٠,١٠٥٦

مثال (٨):

احسب: ل (د ≥ - ٢,٢٥)

الحل:



من واقع تماثل المساحات في نصفي الشكل نجد أن:

ل (د ≥ -٢,٢٥) = ل (د ≤ ٢,٢٥)

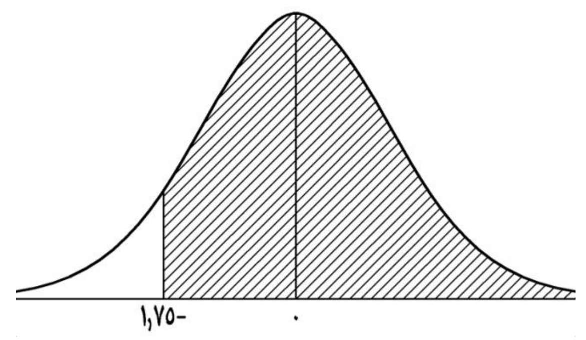
= ٠,٥ - ل (٠ ≥ د ≥ ٢,٢٥)

= ٠,٥ - ٠,٤٨٧٨ = ٠,٠١٢٢

مثال (٩):

احسب: ل (د ≤ - ١,٧٥)

الحل:



من واقع تماثل المساحات في نصفي الشكل نجد أن:

ل (د ≤ - ١,٧٥) = ٠,٥ + ل (٠ ≥ د ≥ ١,٧٥)

= ٠,٥ + ٠,٤٥٩٩ = ٠,٩٥٩٩

بند (٢): تحويل المتغير الطبيعي العادي إلي المتغير الطبيعـــي النمطـــي (المعياري):

إذا كان لدينا (س) متغير عشوائي متصل موزع توزيعـــاً طبيعيـــاً معتدلاً بمتوسط م وانحراف معياري ع فإن (د) متغير عشوائي متصـــل موزع توزيعاً طبيعياً معيارياً متوسطه = صفر وانحرافه المعيـــاري = ١ حيث أنه توزيع طبيعي متماثل حول الصفر , ويطلق علي المتغيـــر (د) الدرجة المعيارية ويتم حسابها من العلاقة التالية:

$$د = \frac{س - م}{ع}$$

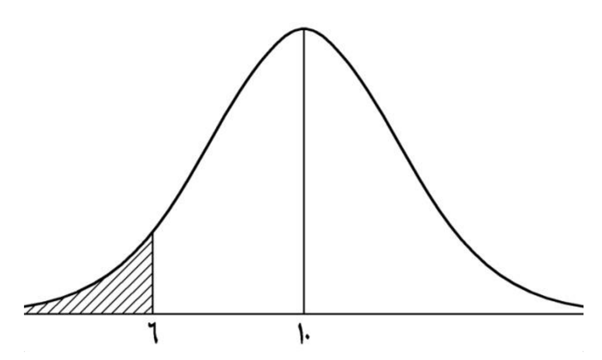
أي أن أي قيمة في توزيع طبيعي عادي لها قيمة مناظرة فـــي التوزيـــع الطبيعي المعياري.

مثال (١):

إذا كان لدينا متغير عشوائي طبيعي عادي وسطه الحسابي ١٠ وانحرافه المعياري ٢ احسب احتمال أن المتغير الطبيعي العادي س يأخذ قيمة أقل من أو تساوي ٦

الحل:

ل (س $\leq$ ٦)

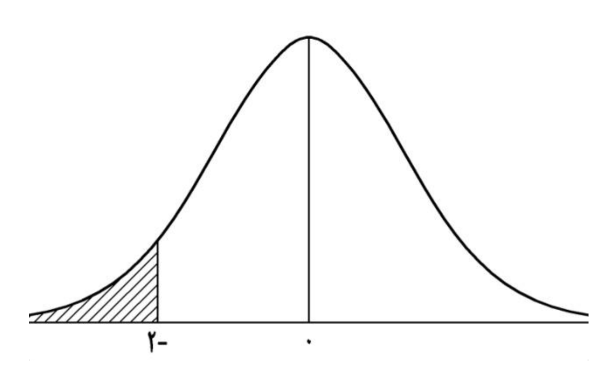


يتم تحويل القيم ١٠ ، ٦ في التوزيع الطبيعي العادي إلي قيم معيارية فى التوزيع الطبيعي المعياري حيث:

$$د_١ = \frac{س - م}{ع} = \frac{١٠ - ١٠}{٢} = صفر$$

$$د_٢ = \frac{س - م}{ع} = \frac{٦ - ١٠}{٢} = - ٢$$

$\therefore$ ل (س $\leq$ ٦) = ل (د $\leq$ −٢)



يتضح من الشكلين السابقين انهما متطابقان

$\therefore$ ل (د $\leq$ −٢) = ٠,٥ − ل (٠ $\leq$ د $\leq$ ٢)

= ٠,٥ − ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

مثال (٢):

تبين لأحد المصانع المنتجة لقطع غيار التليفزيون أن الوسط لحسابي لعمر اللمبة هو ٨٠٠ ساعة وأن الانحراف المعياري هو ٢٠ ساعة احسب الاحتمالات الآتية:

أ – احتمال أن يكون عمر أحد اللمبات المنتجة والتي اختيرت عشوائياً يتراوح ما بين ٨٠٠ ساعة , ٨٤٠ ساعة.

ب – احتمال أن يتراوح عمر إحدى اللمبات المختارة عشوائياً ما بين ٨٧٠ ساعة ، ٨٣٠ ساعة

ج – احتمال أن يكون عمر إحدى اللمبات المختارة عشوائياً ٨٥٠ ساعة علي الأقل

د – احتمال ألا يزيد عمر إحدى اللمبات عن ٨٢٠ ساعة

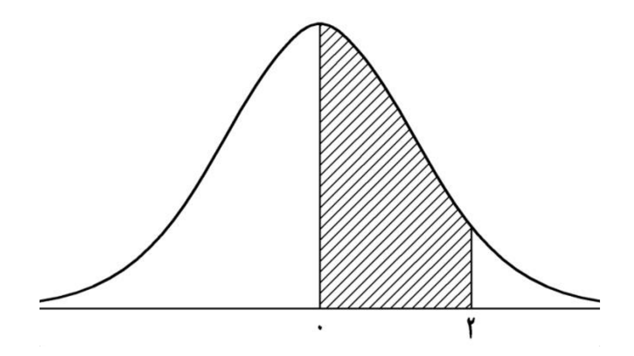
الحل:

(أ) ل (٨٠٠ $\geq$ س $\geq$ ٨٤٠)

$$د_{١} = \frac{٨٠٠ - ٨٠٠}{٢٠} = \text{صفر}$$

$$د_{٢} = \frac{٨٤٠ - ٨٠٠}{٢٠} = ٢$$

∴ ل (٨٠٠ $\geq$ س $\geq$ ٨٤٠) = ل (٠ $\geq$ د $\geq$ ٢) = ٠,٤٧٧٢



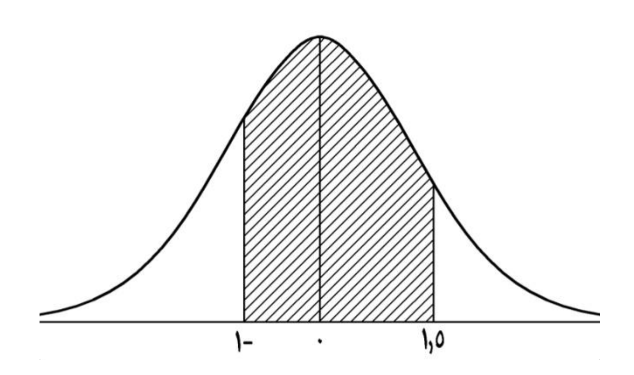
(ب) ل (٧٨٠ ≥ س ≥ ٨٣٠)

$د_١ = \frac{٧٨٠-٨٠٠}{٢٠} = -١$ ، $د_٢ = \frac{٨٣٠-٨٠٠}{٢٠} = ١,٥$

∴ ل (٧٨٠ ≥ س ≥ ٨٣٠)= ل (-١ ≥ د ≥ ١,٥)

= ل (٠ ≥ د ≥ ١,٥) + ل (٠ ≥ د ≥ ١)

= ٠,٤٣٣٢ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٧٧٤٥



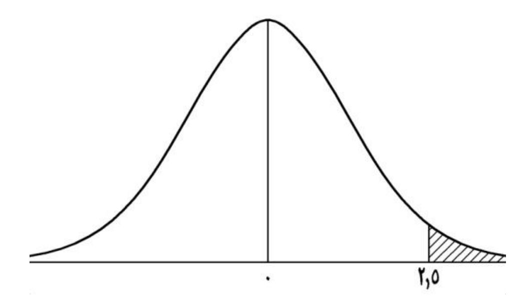
(ج) ل (س ≤ ٨٥٠)

$$د = \frac{٨٥٠-٨٠٠}{٢٠} = ٢,٥$$

∴ ل (س ≤ ٨٥٠) = ل (د ≤ ٢,٥)

= ٠,٥ − ل (٠ ≤ د ≤ ٢,٥)

= ٠,٥ – ٠,٤٩٣٨ = ٠,٠٠٦٢



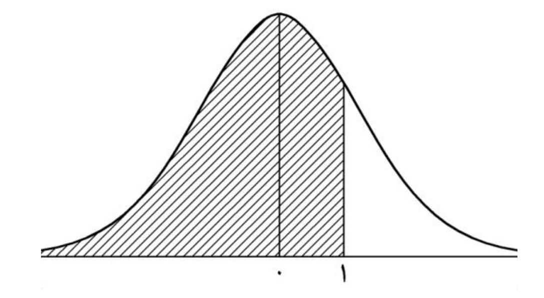
(د) ل (س ≥ ٨٢٠)

$$د = \frac{٨٢٠-٨٠٠}{٢٠} = ١$$

∴ ل (س ≥ ٨٢٠) = ل (د ≥ ١)

= ل (٠ ≥ د ≥ ١) + ٠,٥

= ٠,٣٤١٣ + ٠,٥ = ٠,٨٤١٣



<u>مثال (٣):</u>

في جدول حياة معين إذا كان توزيع أعمار المؤمن لهم حسب احتمـــالات الوفاة يخضع للتوزيع الطبيعي وكان متوسط العمر الشائع للمجموعة هو ٤٠ سنة وتشتت الأعمار حول هذا المتوسط باستخدام التبـــاين ٦٤ ســـنة احسب ما يلي:

أ – احتمال وفاة شخص يخضع لهذا التوزيع بعد بلوغه تمام العمر ٥٠

ب– احتمال وفاة شخص يخضع لهذا التوزيع بين تمام العمر ٤٤ وتمام العمر ٥٦

<u>الحل:</u>

$\because$ ع^{٢} = ٦٤ $\therefore$ ع = ٨ ، م = ٤٠

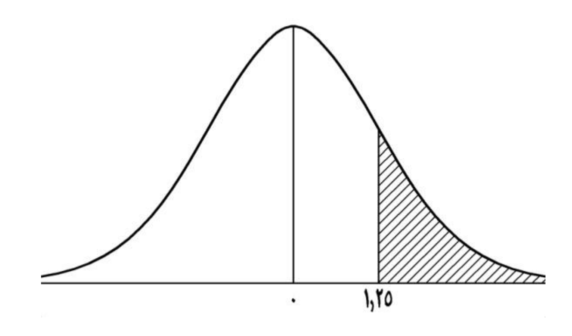
(أ) ل (س $\geq$ ٥٠)

$$د = \frac{٥٠ - ٤٠}{٨} = ١,٢٥$$

$\therefore$ ل (س $\geq$ ٥٠) = ل (د $\geq$ ١,٢٥)

= ٠,٥ – ل (٠ $\leq$ د $\leq$ ١,٢٥)

= ٠,٥ – ٠,٣٩٤٤ = ٠,١٠٥٦



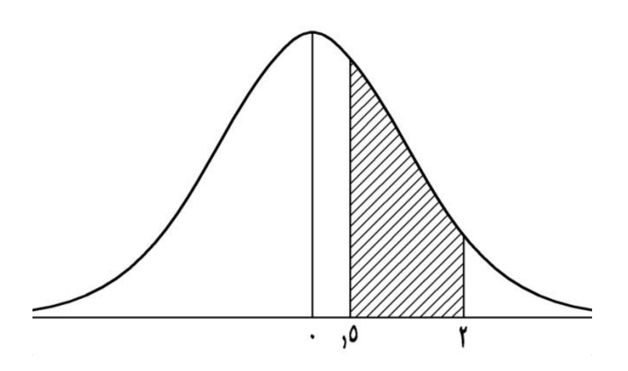
(ب) ل (٤٤ ≤ س ≤ ٥٦)

$د_١ = \frac{٤٤ - ٤٠}{٨} = ٠,٥$ ، $د_٢ = \frac{٥٦ - ٤٠}{٨} = ٢$

∴ ل (٤٤ ≤ س ≤ ٥٦) = ل (٠,٥ ≤ د ≤ ٢)

= ل (٠ ≤ د ≤ ٢) – ل (٠ ≤ د ≤ ٠,٥)

= ٠,٤٧٧٢ – ٠,١٩١٥ = ٠,٢٨٥٧



مثال (٤):

قام أحد مصانع التليفزيون باختبار عدد ١٠٠٠ شاشة منتجة فإذا كان متوسط عمر الشاشة الواحدة ١٥٠٠ ساعة تشغيل والتباين يبلغ ٤٠٠ ساعة , المطلوب حساب عدد الشاشات التي يتراوح عدد ساعات تشغيلها بين ١٤٦٥ , ١٥٢٥ ساعة.

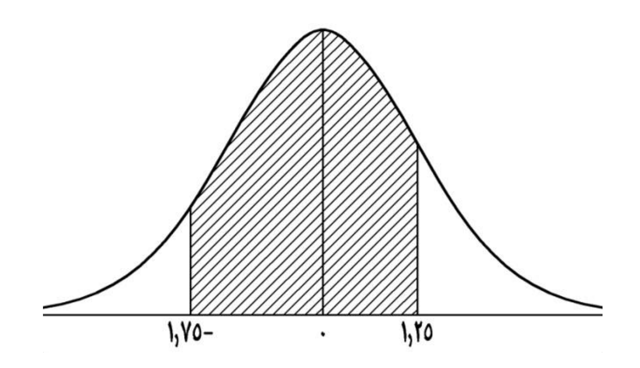
الحل:

م = ١٥٠٠ $ع^٢ = ٤٠٠$ ∴ ع = $\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠

ل (١٤٦٥ ≤ س ≤ ١٥٢٥)

$$د_١ = \frac{١٤٦٥-١٥٠٠}{٢٠} = -١,٧٥$$

$$د_٢ = \frac{١٥٢٥-١٥٠٠}{٢٠} = ١,٢٥$$



∴ ل (١٤٦٥ ≤ س ≤ ١٥٢٥) = ل (-١,٧٥ ≤ د ≤ ١,٢٥)

= ل (٠ ≤ د ≤ ١,٢٥) + ل (٠ ≤ د ≤ ١,٧٥)

= ٠,٣٩٤٤ + ٠,٤٥٩٩ = ٠,٨٥٤٣

∴ احتمال أن يتراوح متوسط عدد ساعات تشغيل الشاشة الواحدة بين ١٤٦٥ ، ١٥٢٥ ساعة = ٨٥,٤٣٪

∴ عدد الشاشات التي يتراوح عدد ساعات تشغيلها بين ١٤٦٥ ، ١٥٢٥ ساعة من بين ١٠٠٠ شاشة منتجة

$$= ١٠٠٠ \times \frac{٨٥٤٣}{١٠٠٠٠} =$$ ٨٥ شاشة تقريباً

بند (٣) تحديد الدرجة المعيارية إذا علم الاحتمال:

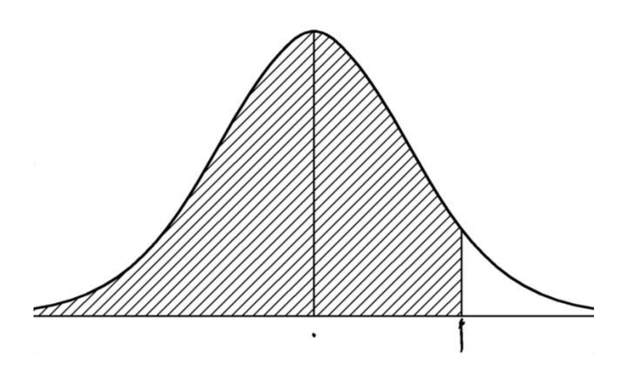
يستخدم جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي المعياري في تحديد الدرجة المعيارية إذا علم الاحتمال وبالتالي يمكن تحديد القيمة الأصلية للمتغير العشوائي الطبيعي س كما يتضح ذلك من الأمثلة التالية:

مثال (١):

في مجتمع معين يتبع التوزيع الطبيعي العادي مركزه ٣٠ وانحرافه المعياري ٤ حُسب احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي الطبيعي المعياري قيمة معينة أو أقل منها أو قيمة معينة علي الأكثر فبلغ هذا الاحتمال ٠,٩٣٣٢ أوجد القيمة الأصلية للمتغير العشوائي الطبيعي العادي س علي المحور الأفقي للتوزيع.

الحل:

ل (د $\leq$ أ) = ٠,٩٣٣٢



$\therefore$ ل (٠ $\leq$ د $\leq$ أ) = ٠,٩٣٣٢ − ٠,٥ = ٠,٤٣٣٢

بالبحث في جدول المساحات أسفل المنحنـــي الطبيعـــي عــن الاحتمـــال ٠,٤٣٣٢ , سنجد أنه يقع أمام الدرجة المعيارية ١,٥

∴ د = ١,٥

ولإيجاد القيمة الأصلية للمتغير العشوائي س نعوض في قانون الدرجـــة المعيارية:

$$د = \frac{س - م}{ع}$$

$$١,٥ = \frac{س - ٣٠}{٤}$$

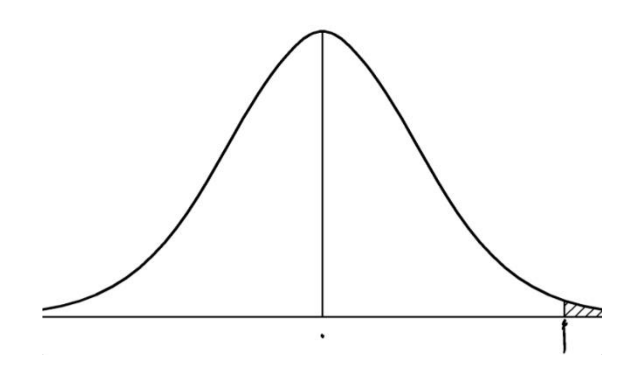
٦ = س − ٣٠ ∴ س = ٣٦

مثال (٢):

إحدى جداول الحياة يتبع التوزيع الطبيعي العادي إذا كان متوسط العمـــر في هذا المجتمع ٥٠ سنة والانحراف المعياري ٨ سنوات , طلب شخص عمره الآن ٣٠ سنة شراء وثيقة تأمين مؤجل لمدى الحياة تضمن ســـداد مبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه عند وفاته في أي وقت بعد سن معينة احســـب هـــذه السن إذا كان احتمال وفاته بعد هذه السن= ٠,٠٠٦٢

الحل:

ل (د ≥ أ) = ٠,٠٠٦٢



∴ ل (٠ ≤ د ≤ أ) = ٠,٥ − ٠,٠٠٦٢ = ٠,٤٩٣٨

بالبحث في جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي عن احتمال ٠,٤٩٣٨ سنجد أنه يقع أمام الدرجة المعيارية ٢,٥

ولإيجاد العمر الأصلي للمتغير العشوائي الطبيعي العادي والذي تحــدث بعده الوفاة نعوض في قانون الدرجة المعيارية:

$$د = \frac{س - م}{ع}$$

$$٢,٥ = \frac{س - ٥٠}{٨}$$

٢٠ = س − ٥٠

∴ العمر المطلوب (س) = ٧٠ سنة

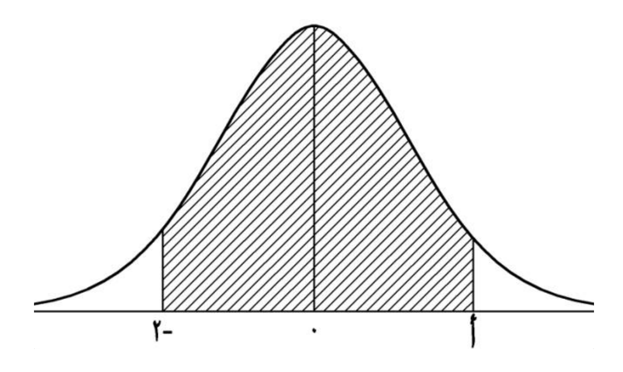
<u>مثال (٣):</u>

في مجتمع معين يتبع التوزيع الطبيعي العــادي مركــزه ٣٠ وانحرافــه المعياري ٥ وُجد أن:

ل (−٢ ≤ د ≤ أ)=٠,٩١٠٤ احسب الدرجة المعيارية (أ) على المحور الأفقي ثم القيمة الأصلية للمتغير العشوائي الطبيعي العادي (س)

الحل:

ل (−٢ ≤ د ≤ أ) = ٠,٩١٠٤



∴ ل (٠ ≤ د ≤ أ) + (−٢ ≤ د ≤ ٠) = ٠,٩١٠٤

ل (٠ ≤ د ≤ أ) + (٠ ≤ د ≤ ٢) = ٠,٩١٠٤

ل (٠ ≤ د ≤ أ) + ٠,٤٧٧٢ = ٠,٩١٠٤

∴ ل (٠ ≤ د ≤ أ) = ٠,٩١٠٤ − ٠,٤٧٧٢ = ٠,٤٣٣٢

بالبحث عن هذا الاحتمال في جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي المعياري سنجد أنه يقع أمام الدرجة المعيارية ١,٥

$$\because \text{د} = \frac{\text{س} - \text{م}}{\text{ع}}$$

$$\therefore ١,٥ = \frac{\text{س} - ٣٠}{٥}$$

٧,٥ = س – ٣٠

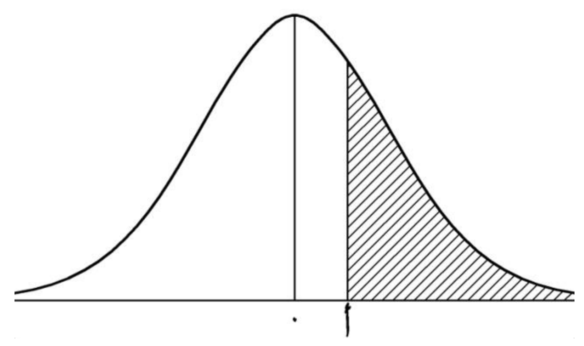
∴ س = ٣٧,٥

مثال (٤):

أوجد عدد الساعات التي يعمل عندها أو أكثر منها ٢٠٪ من لمبات التليفزيون إذا كان متوسط ساعات تشغيل اللمبة الواحدة ١٢٠٠ ساعة والانحراف المعياري ٢٠٠ ساعة ثم أوجد عدد الساعات التي يعمل عندها أو أقل منها ٦٤٪ من اللمبات.

الحل:

(أ) ل (د ≤ أ) = ٠,٢٠



∴ ل (٠ ≤ د ≤ أ) = ٠,٥٠ – ٠,٢٠ = ٠,٣٠

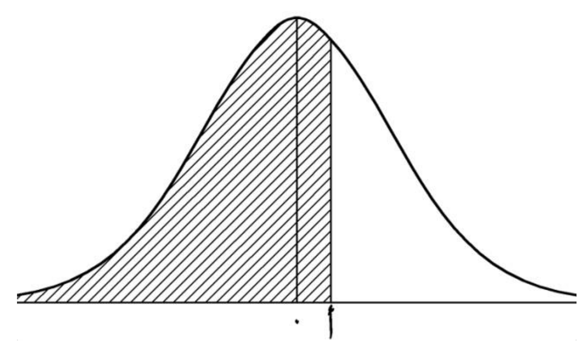
بالبحث عن هذا الاحتمال في جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي المعياري سنجد أن الاحتمال يقع تقريباً أما الدرجة المعيارية ٠,٨٤

∵ د = $\frac{\text{س} - \text{م}}{\text{ع}}$

$\therefore$ ٠,٨٤ = $\frac{\text{س} - ١٢٠٠}{٢٠٠}$

١٦٨ = س − ١٢٠٠ $\therefore$ س = ١٣٦٨ ساعة

(ب) ل (د ≥ أ) = ٠,٦٤



$\therefore$ ل (٠ ≥ د ≥ أ) = ٠,٦٤ − ٠,٥٠ = ٠,١٤

بالبحث عن هذا الاحتمال في جدول المساحات سنجد أنه يقع أمـــام الدرجة المعيارية ٠,٣٦ تقريباً ولإيجاد العدد الفعلي للساعات نعوض في قانون الدرجة المعيارية

د = $\frac{\text{س} - \text{م}}{\text{ع}}$

٠,٣٦ = $\frac{\text{س} - ١٢٠٠}{٢٠٠}$

٧٢ = س − ١٢٠٠

$\therefore$ س = ١٢٧٢ ساعة

تمارين على الباب السابع

١ – احسب باستخدام جدول التوزيع الطبيعـي المعيـاري الاحتمـالات الآتية:

أ- ل (٠ ≥ د ≥ ١,٢)

ب- ل (١ ≥ د ≥ ٢,٢٥)

ج- ل (-١ ≥ د ≥ ٠,٨٥)

د- ل (-٢ ≥ د ≥ -١,٥)

ه- ل (د ≥ ١,٢٥)

و- ل (د ≤ ٢,٨)

ز- ل (د ≥ - ١,٥٥)

ح- ل (د ≤ - ٢,٣)

٢ – تبين لأحد المصانع المنتجة لقطع غيار السيارات أن متوسط عمـر القطعة من منتج معين هو ٦٠٠ ساعة وأن الانحراف المعيـارى ١٥ ساعة احسب الاحتمالات الآتية:

أ- احتمال أن يكون عمر أحد القطع المنتجة يتراوح ما بـين ٦٠٠ ساعة , ٦٣٥ ساعة

ب- احتمال أن يكون عمر أحد القطع المنتجة يتراوح ما بـين ٥٨٠ ساعة , ٦٤٠ ساعة

ج- احتمال أن يكون عمر أحد القطع المنتجة ٦٢٠ ساعة علي الأقل

د- احتمال أن يكون عمر أحد القطع المنتجة ٥٩٠ سـاعة علـي الأكثر

٣ – في جدول حياة معين إذا كان توزيع أعمار المؤمن لهم حسب احتمالات الوفاة تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط عمر شائع ٥٥ سنة وتشتت الأعمار حول هذا المتوسط باستخدام التباين هو ١٠٠ سنة احسب ما يلي:

أ- احتمال وفاة شخص بين تمام العمر ٤٠ وتمام العمر ٦٠

ب- احتمال وفاة شخص بعد بلوغه تمام العمر ٦٥

ج- احتمال وفاة شخص عمره الآن ٥٠ سنة قبل بلوغه تمام العمر ٧٠

٤ – قام أحد مصانع الفيديو باختبار عدد ٥٠٠ لمبة منتجة فإذا كان متوسط عمر اللمبة الواحدة ١٢٠٠ ساعة تشغيل والانحراف المعيارى ٣٠ ساعة احسب ما يلي:

أ- عدد اللمبات التي يتراوح ساعات تشغيلها بين ١١٥٠ ساعة , ١٢٣٠ ساعة

ب- عدد اللمبات التي تعمل في المتوسط ١٢٥٠ ساعة علي الأقل.

٥ – في مجتمع معين يتبع التوزيع الطبيعي العادي مركزه ٦٠ وانحرافه المعياري ٧ حُسب احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة معينة أو أقل منها فبلغ هذا الاحتمال ٠,٩٩٣٨ أوجد القيمة الأصلية للمتغير العشوائي س.

٦ – في مجتمع معين يتبع التوزيع الطبيعي العادي مركزه ٥٠ وانحرافه المعياري ٨ وجد أن:

ل (-١,٥ ≤ د ≤ أ) = ٠,٦٢٤٧ احسب القيمة الأصلية للمتغير العشوائي س.

٧ - إذا كان متوسط عمر تشغيل المقاومة الواحدة في جهاز ترانزستور ٨٠٠ ساعة والانحراف المعياري ١٢٠ ساعة احسب ما يلي:

أ- عدد الساعات التي يعمل عندها أو أكثر منها ١٥٪ من المقاومات المنتجة.

ب- عدد الساعات التي يعمل عندها أو أقل منها ٧٧٪ من المقاومات المنتجة.

٨ - س متغير عشوائي طبيعي عادي ووسطه الحسابي ٢٠ وانحرافه المعياري ٢ احسب احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي س القيمة ١٧ علي الأقل.

٩ - إذا كان توزيع أجور ١٥٠٠ عامل يتبع المنحني الطبيعي بمتوسط أجر ٢٠٠ جنيه في الشهر وتباين الأجر ١٠٠ جنيه احسب ما يلي:

أ- عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ١٨٠ جنيه , ٢١٥ جنيه

ب- عدد العمال الذين يقل أو يساوي أجرهم الشهري ١٩٠ جنيه

ج- عدد العمال الذين يزيد أو يساوي أجرهم الشهري ١٧٥ جنيه

الباب الثامن
نظرية العينات واختبارات الفروض الاحصائية

الفصل الأول: نظرية العينات و التقدير

الفصل الثاني: اختبارات الفروض الاحصائية

مقدمة:

سبق أن ذكرنا عند دراستنا في الباب الأول أننا نضطر في كثير من البحوث ولعدم التمكن من دراسة المجتمع كـــاملاً أن نلجـــأ لاختيار عينة عشوائية ممثلة لهذا المجتمع الأصلي وأياً كان حجم هذه العينة فدائماً وصفها ومعرفة خصائصها يختلف تماماً عـــن وصف وخصائص المجتمع الأصلي ، بالإضافة إلى أننا نحـــاول دائماً استنتاج أو استنباط خصائص أخرى عن المجتمع من واقع دراستنا للعينات أي أننا نسعى في هذا الباب إلى تعمـــيم نتـــائج العينة على المجتمع الأصلي (نظريـــة التقـــدير الإحصـــائي) ، بالإضافة إلى المقارنة بين خصائص المجتمعات المختلفـــة مـــن واقع دراسة العينات (اختبارات الفروض الإحصائية) وهذا الباب يعتبر جانب أساسي وجوهري في علم الإحصاء التحليلي ويـــتم من خلاله دراسة الموضوعات التالية:

الفصل الأول: نظرية العينات والتقدير.

الفصل الثاني: اختبارات الفروض الإحصائية.

الفصل الأول
نظرية العينات والتقدير

بعض التعاريف الهامة:

١ – الخطأ المعياري Standard Error

إذا كان لدينا مجتمع معين حجمه (ن َ) وسحبنا من هــذا المجتمــع عــدة عينات متساوية الحجم وبفرض أن حجم كل عينة (ن) فيصبح لدينا مجتمع جديد هو مجتمع العينات المسحوبة من المجتمع الأصلي وعددها = ن َ $^{ق}_{ن}$

وبفرض أننا قمنا بحساب أحد المقاييس الإحصائية الهامة للمجتمع الأصلي وبحساب نفس المقياس لكل عينة من العينات المسحوبة من هذا المجتمع ، وبفرض أن هذا المقياس الإحصائي هو الوسط الحســابي ، وإذا رمزنـــا للوسط الحسابي للمجتمع بالرمز (μ) أو الرمز المعرب (م) وبفــرض أن الأوساط الحسابية للعينات المسحوبة من المجتمع هي:

$\overline{س}_١$ ، $\overline{س}_٢$ ، $\overline{س}_٣$ ، ..... ، $\overline{س}_ن$

ويُكون مجتمع الأوساط الحسابية للعينات السابق توزيع جديد يطلق عليــه توزيع المعاينة وأهم خصائص هذا التوزيع هي:

أ- إذا كان توزيع المجتمع الأصلي توزيعاً متماثلاً أو معتدلاً كان توزيع المعاينة (المتوسطات) توزيعاً متماثلاً أيضاً وخاصة إذا كــان حجــم العينة كبيراً بحيث لا يقل عن ٣٠ مفردة أي أن (ن $\leq$ ٣٠)

ب- يوجد انحرافات بين الوسط الحسابي للمجتمع (م) والأوساط الحسابية للعينات بعضها موجب وبعضها سالب ومجموع الانحرافات دائماً = صفر.

ج- متوسط المجتمع (م) هو متوسط الأوساط الحسابية لمجتمع العينات الصغيرة (توزيع المعاينة) المتساوية الحجم أي أن:

$$م = \frac{\sum_{ر=١}^{ر=ن} \bar{س}_ر}{ن}$$

ويمكن كتابتها باختصار كما يلي:

$$م = \frac{مجـ \bar{س}}{ن}$$

د- الانحرافات السابقة الموجبة والسالبة تزيد وتنقص حسب مدى التشتت أو التباين بين مفردات المجتمع الأصلي (بعضها البعض) أي أنها تتأثر بالانحراف المعياري لمفردات المجتمع الأصلي.

ه- الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة (التوزيع العيني للمتوسطات) ويمكن أن نطلق عليه اصطلاح الخطأ المعياري Standard Error ويمكن حسابه من العلاقة التالية:

بفرض أن الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي (σ) أو الرمز المعرب عَ فإن:

الخطأ المعياري للوسط الحسابي:

$$\sigma_{\bar{س}} = \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \quad \text{أو} \quad ع_{\bar{س}} = \frac{عَ}{\sqrt{ن}}$$

وفي حالة عدم توافر الانحراف المعياري للمجتمع يتم الاستعاضة عنه بالانحراف المعياري للعينة (ع) ويصبح:

$$ع_{\bar{س}} = \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$

و- يعتبر الخطأ المعياري السابق دالة لمتغيرين هما: الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي وحجم العينة أي أن $ع_{\bar{س}}$= د(ع،ن) وتكون هناك علاقة طردية بين الخطأ المعياري والانحراف المعياري وعلاقة عكسية بين الخطأ المعياري وحجم العينة.

ز- يعتبر الخطأ المعياري دلالة هامة أو مؤشر هام في نظرية التقدير وخاصة عند استنتاج مقاييس المجتمع من مقاييس العينة أو عند مقارنة نتائج العينات بنتائج المجتمع وتحديد مدى دلالة الفروق والانحرافات بينها.

٢ – المعالم (المعلمات) والتقديرات Parameters and Statistics

المعلمة عبارة عن قيمة أو مقياس محسوب من المجتمع الأصلي أما ما يقابل هذه القيم والمقاييس والمحسوبة من العينات تسمى تقديرات أو مقاييس إحصائية ، ومعلمات المجتمع دائماً ثابتة في حين أن التقديرات أو المقاييس الإحصائية المحسوبة من العينات فهي دائماً غير ثابتة وتتعرض للأخطاء العشوائية ، وستتركز دراستنا في هذا الفصل على المقياس الإحصائي الهام "الوسط الحسابي" المحسوب من عينة بالإضافة للتقديرات المحسوبة من عينات على شكل نسب مئوية ، وإمكانية مقارنة هذه المقاييس أو التقديرات بمعالم المجتمع أو استخدامها لتقدير معالم المجتمع

، والأسلوب الذي سوف نطبقه على الوسط الحسابي والنسبة يمكن استمراره للتطبيق على باقي المقاييس والتقديرات الإحصائية الأخرى.

٣ – نظرية النهاية المركزية: Central Limit Theorem

إذا كان المجتمع كبير أو مجتمع غير محدود أياً كان نوع التوزيع متماثلاً أو غير متماثل فإن توزيع المعاينة (المتوسطات): $\bar{س}_١$ ، $\bar{س}_٢$ ، $\bar{س}_٣$ ، ..... ، $\bar{س}_ن$ يتجه هذا التوزيع نحو التماثل أو الاعتدال بزيادة حجم العينة زيادة كبيرة جداً.

٤ – معامل تصحيح العينات الصغيرة (أو المجتمعات المحدودة):

عند حساب الخطأ المعياري للوسط الحسابي $ع_{\bar{س}}$ يتم ضرب هذا الخطأ في معامل التصحيح التالي:

معامل التصحيح = $\sqrt{\frac{ن' - ن}{ن' - ١}}$ حيث ن′حجم المجتمع ، ن حجم العينة.

ويطلق عليه معامل تصحيح المجتمع المحدود أو العينات الصغيرة "Finite Population Correction Factor" وفي المجتمعات الكبيرة جداً (عندما ن تكون كبيرة جداً فإن معامل التصحيح يقترب من الواحد الصحيح وبالتالي يمكن إهماله).

وعموماً قرر الاحصائيون إهمال هذا المعامل إذا كانت العلاقة بين حجم العينة وحجم المجتمع هي:

ن′> ٠,٠٥ من حجم المجتمع أو ن > ٣٠ مفردة في حالة صعوبة حصر المجتمع أو عده

وإذا استخدمنا معامل التصحيح السابق في العينات الصغيرة يمكن حساب الخطأ المعياري باستخدام العلاقة التالية:

$$\sigma_{س} = \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{ن' - ن}{ن' - ١}}$$

و بتعريب بعض الرموز السابقة يصبح القانون:

$$ع_{س} = \frac{ع'}{\sqrt{ن}} \times \sqrt{\frac{ن' - ن}{ن' - ١}}$$

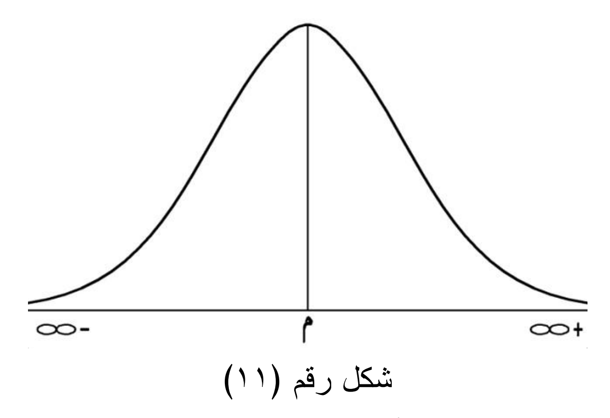
أو باستخدام الانحراف المعياري للعينة في حالة عدم تـوافر الانحـراف المعياري للمجتمع.

<u>تقدير معالم المجتمع من واقع بيانات العينات الكبيرة:</u>

سنتعرض هنا لدراسة العينات الكبيرة والتي يزيد حجمها عن ٣٠ مفـردة أو حجمها يزيد عن ٥٪ من حجم المجتمع الأصلي وبالتالي سنهمل معامل التصحيح السابق.

<u>أولاً: المجتمع الذي يقدر مركزه علي شكل الوسط الحسابي:</u>

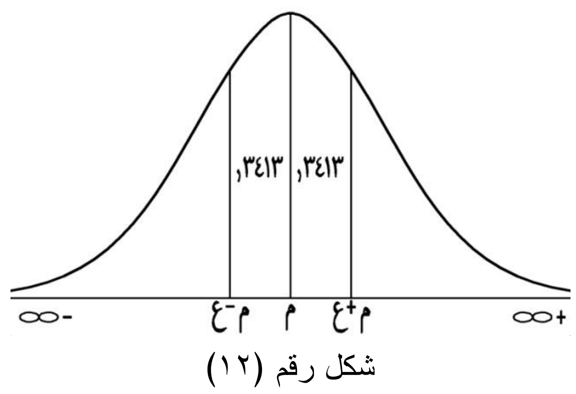
يعتبر الوسط الحسابي المحسوب من عينة من أهم المقاييس والتي تتميـز أو ينطبق عليها بكفاءة اختبارات جودة التقدير من حيث: عدم التحيـز – الاتساق – الكفاءة – الكفاية , وبالتالي فإن تقدير مركـز المجتمـع عـن طريق الوسط الحسابي للعينة يعتبر تقدير ملائم وجيد ويتم تقدير مركـز المجتمع إما علي شكل نقطة أو خلال فترة ثقة مناسبة , والتقدير خـلال فترة يعتبر أدق نظراً لأن تعميم الوسط الحسابي $\bar{س}$ كما هو تماماً علـي المجتمع يحوى خطأ عشوائي أو خطأ صدفة (الخطـأ المعيـاري) , وإذا رجعنا للتوزيع الطبيعي المتماثل والذي يأخذ الشكل التالي:



شكل رقم (١١)

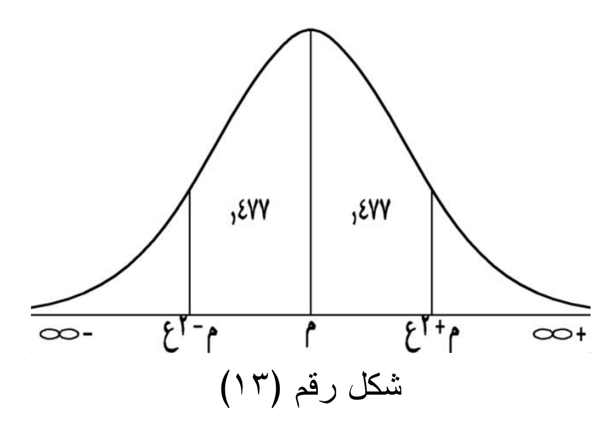
وباستخدام جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي يمكن التوصل للنتائج التالية:

١ – إن المسافة التي تبعد عن الوسط الحسابي بمقدار انحراف معيـــاري واحد علي جانبي الوسط الحسابي تشمل ٦٨,٢٧٪ من مفردات هذا التوزيع ويمكن اعتبار هذه النسبة (الاحتمال) درجة ثقة أو تأكد في التقدير كما يتضح من الشكل التالي:



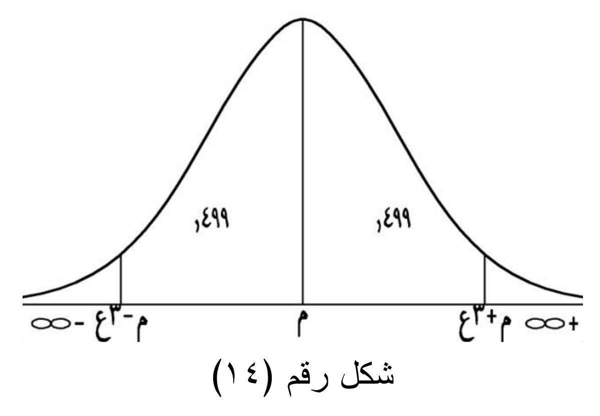
شكل رقم (١٢)

٢ – إن المسافة التي تبعد عن الوسط الحسابي بمقدار انحرافين معياريين علي جانبي الوسط الحسابي تشمل ٩٥,٤٥٪ مـــن مفـــردات هـــذا التوزيع كما يتضح من الشكل التالي:



شكل رقم (١٣)

٣ – إن المسافة التي تبعد عن الوسط الحسابي بمقدار ثلاثـــة انحرافـــات معيارية علي جانبي الوسط الحسابي تشمل ٩٩,٧٣٪ من مفـــردات هذا التوزيع, كما يتضح من الشكل التالي:



شكل رقم (١٤)

ويطلق علي درجة الثقة أو الاحتمال الرمز(بيتا β) كما يطلق علي متمم درجة الثقة أو درجة التأكد مستوي المعنوية "Level of Significance" وهي درجة عدم التأكد ونرمز لها بالرمز (الفا ∝) أي أن:

$$\beta + \propto = ١$$

كما يطلق علي الحدين:

م + ع ، م – ع أو م + ٢ع ، م – ٢ع أو م + ٣ع ، م – ٣ع حدى الثقة ويعتبر التقديرين الثاني والثالث الأكثر شيوعاً أو استخداما لتدني نسبة الخطأ في التقدير حيث أنها لا تتجاوز ٥٪

كما يمكن للباحثين استخدام جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي للحصول علي نسب واحتمالات أخرى متعددة.

تقدير الوسط الحسابي للمجتمع (م) خلال فترة ثقة مناسبة:

نجد أن الوسط الحسابي للمجتمع (م) يتراوح بين الوسط الحسابي للعينة ± الخطأ المعياري للوسط الحسابي وذلك بدرجة ثقة معينة أي أن م تتراوح بين:

$\bar{س} \pm ١ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$ بدرجة ثقة ٦٨,٢٧٪

، $\bar{س} \pm ٢ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٥,٤٥٪

، $\bar{س} \pm ٣ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٩,٧٣٪

وإذا استبعدنا النسبة الأولي من مجال التقدير لأنها تحتوي علي نسبة خطأ أو نسبة عدم تأكد كبيرة في التقدير تقترب من٣٢٪ ولذلك سنكتفي بالنسبتين الثانية والثالثة وإذا حولنا درجات الثقة في هاتين النسبتين إلي أعداد صحيحة ٩٥٪ ، ٩٩٪ تتغير الأرقام ٢ ,٣ ضعف وثلاثة أمثال الخطأ المعياري من واقع جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي إلي الأرقام التالية ١,٩٦ ، ٢,٥٨ ويتغير التقدير السابق إلي ما يلي:

الوسط الحسابي للمجتمع م يتراوح بين:

$$\bar{س} \pm ١,٩٦ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$$\bar{س} \pm ٢,٥٨ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$ بدرجة ثقة ٩٩٪

<u>المثال الأول:</u>

بلغ متوسط الأجر لعينة من عمال إحدى الصناعات حجمها ١٠٠ عامل ١٨٠ جنيه شهرياً , وإذا كان تباين الأجر في هذه الصناعة هو ٢٥ جنيه قدر بفترة ثقة مناسبة متوسط الأجر في هذه الصناعة عموماً.

<u>الحل:</u>

$\bar{س} = ١٨٠$ $ن = ١٠٠$ $ع^٢ = ٢٥$

$$\therefore ع = \sqrt{٢٥} = ٥$$

متوسط الأجر في الصناعة عموماً (م) يتراوح بين:

$$\bar{س} \pm ٢ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$ بدرجة ثقة ٩٥,٤٥٪

$$١٨٠ \pm ٢ \times \frac{٥}{\sqrt{١٠٠}}$$ بدرجة ثقة ٩٥,٤٥٪

$$١٨٠ \pm ١$$ بدرجة ثقة ٩٥,٤٥٪

أي أن م تتراوح بين ١٧٩ جنيه , ١٨١ جنيه بدرجة ثقة ٩٥,٤٥٪ وإذا غيرنا درجة الثقة إلي ٩٩,٧٣٪ يختلف التقدير كما يلي:

متوسط الأجر في الصناعة عموماً (م) يتراوح بين:

$\bar{س} \pm ٣ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٩,٧٣٪

$١٨٠ \pm ٣ \times \frac{٥}{\sqrt{١٠٠}}$ بدرجة ثقة ٩٩,٧٣٪

$١٨٠ \pm ١,٥$ بدرجة ثقة ٩٩,٧٣٪

أي أن م تتراوح بين ١٧٨,٥ جنيه ، ١٨١,٥ جنيه بدرجة ثقة ٩٩,٧٣٪

المثال الثاني:

متوسط وزن الوحدة بالجرام	٢٠-	٤٠-	٦٠-	٨٠-	١٠٠-١٢٠
عدد الوحدات	١٠	١٥	٣٥	٢٥	١٥

قدر عند مستوي معنوية ∝ = ٥٪ متوسط الوزن في المصنع عموماً.

الحل:

يتم أولاً حساب الوسط لحسابي والتباين والانحراف المعياري للعينة السابقة كما يلي:

ف	ك	س	ح	ح/	ك ح/	ك ح/٢
٢٠-	١٠	٣٠	٤٠-	٢-	٢٠-	٤٠
٤٠-	١٥	٥٠	٢٠-	١-	١٥-	١٥
٦٠-	٣٥	٧٠	٠	٠	٠	٠
٨٠-	٢٥	٩٠	٢٠	١	٢٥	٢٥
١٠٠-١٢٠	١٥	١١٠	٤٠	٢	٣٠	٦٠
	١٠٠ مجـ ك				٢٠ مجـ ك ح/	١٤٠ مجـ ك ح/٢

حيث أ = ٧٠ ، ط = ٢٠

$$\bar{س} = ط \times \frac{مجـك ح}{مجـك} + أ$$

$$= ٢٠ \times \frac{٢٠}{١٠٠} + ٧٠$$

∴ $\bar{س}$ = ٧٤ جرام

$$ع^{٢} = ط^{٢} \left[\frac{مجـك ح^{٢}}{مجـك} - \left(\frac{مجـك ح}{مجـك}\right)^{٢} \right]$$

$$= ٢٠^{٢} \left[\frac{١٤٠}{١٠٠} - \left(\frac{٢٠}{١٠٠}\right)^{٢} \right]$$

$ع^{٢}$ = ٤٠٠ [١,٤٠ – ٠,٠٤] = ٤٠٠ × ١,٣٦ = ٥٤٤ جرام

∴ ع= $\sqrt{٥٤٤}$ = ٢٣,٣٢ جرام

درجة الثقة = ١ – $\propto$ = ١ – ٠,٠٥ = ٩٥٪

∴ متوسط الوزن في الصناعة عموماً (م) يتراوح بين:

$\bar{س} \pm ١,٩٦ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$$٧٤ \pm ١,٩٦ \times \frac{٢٣,٣٢}{\sqrt{١٠٠}}$$

٧٤ ± ٤,٥٧

٦٩,٤٣ جرام ، ٧٨,٥٧ جرام وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪

ثانياً: المجتمع الذي يقدر مركزه علي شكل نسبة:

في بعض البحوث أو الدراسات الاحصائية يلجأ الباحثون لقيـــاس مركـــز المجتمع أو مركز العينة علي شكل نسبة مئوية كأن نقول مثلاً إن نســبة الأميين في مجتمع الريف المصري أو في عينة من قري الريف المصري تبلغ ٦٠٪ وعلي سبيل المثال أيضاً يمكن أن نقول أن نسبة النجــاح فــي مادة الإحصاء لطلبة السنة الثالثة بكلية التجارة جامعة القاهرة دفعة ٢٠١٢ تبلغ ٨٥% وعلي سبيل المثال أيضاً يمكن أن تقول أن نسبة المتعطلين في مجتمع ما تبلغ ١٠٪ وهكذا , وإذا رمزنا لنسبة تحقق الظاهرة في المجتمع الأصلي بالرمز (ح) ولنسبة عدم تحقق الظاهرة في المجتمــع الأصــلي بالرمز (ل) حيث:

ح + ل = ١

∴ ح = ١ – ل

، ل = ١ – ح

وإذا رمزنا لنفس النسب في العينة بالرموز $\hat{ح}$ ، $\hat{ل}$

ويمكن حساب الخطأ المعياري في حالة النسبة من العلاقة التالية:

وإذا رمزنا للخطأ المعياري في حالة النسبة بالرمز $\sigma_{ح}$ أو الرمز المعرب $ع_{ح}$ حيث:

$$ع_{ح} = \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}}$$

وفي حالة المجتمعات المحدودة (أو العينات الصغيرة التــي تعــادل ٣٠ مفردة أو أقل أو لا يتجاوز ٥٪ من حجم المجتمع الأصلي) يستخدم معامل التصحيح السابق بحيث يصبح الخطأ المعياري في حالة النسبة:

$$ع_{\hat{ح}} = \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}} \times \sqrt{\frac{ن' - ن}{ن' - ١}}$$

توزيع المعاينة في حالة النسب:

وبنفس طريقة توزيع المعاينة في الأوساط الحسابية , إذا كان لدينا مجتمع ونسبة تحقق ظاهرة معينة في المجتمع (ح) وتم سحب عينات عددها $ن'_{ق_ن}$ وتم حساب النسب المناظرة في كل عينة وكانت النسب هي:

$\hat{ح}_١$ ، $\hat{ح}_٢$ ، $\hat{ح}_٣$ ، ..... ، $\hat{ح}_ن$

فإن توزيع النسب السابق يطلق عليه توزيع معاينة ويقترب من التوزيع الطبيعي.

تقدير النسبة في المجتمع (ح) خلال فترة ثقة مناسبة:

نجد أن النسبة في المجتمع (ح) تتراوح بين:

النسبة في العينة ± الخطأ المعياري للنسبة بدرجة ثقة معينة أي أن (ح) تتراوح بين:

$\hat{ح} \pm ٢ \times \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٥,٤٥٪

$\hat{ح} \pm ٣ \times \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٩,٧٣٪

أو استخدام درجات الثقة الصحيحة ٩٥% , ٩٩٪ حيث:

$\hat{ح} \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$$\hat{ح} \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}}$$ بدرجة ثقة ٩٩٪

مثال (١):

سحبنا عينة عشوائية من طلبة كلية التجارة – جامعة القاهرة من السنة الثالثة دفعة ٢٠١٢ حجمها ٥٠٠ طالباً حيث وجد أن من بينهم ٤٥٠ طالباً ناجحاً في مادة الإحصاء قدر بفترات ثقة ٩٥٪ ، ٩٩٪ نسبة النجاح في مادة الإحصاء لطلبة السنة الثالثة عامة.

الحل:

نسبة النجاح في العينة $\hat{ح} = \frac{٤٥٠}{٥٠٠} = ٠,٩٠$

∴ نسبة الرسوب في العينة $\hat{ل} = ١ - ٠,٩٠ = ٠,١٠$

النسبة العامة للنجاح تتراوح بين:

$$\hat{ح} \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}}$$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$$٠,٩٠ \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{٠,٩ \times ٠,١}{٥٠٠}}$$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$٠,٩٠ \pm ١,٩٦ \times ٠,٠١٣٤$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$٠,٩٠ \pm ٠,٠٢٦$ بدرجة ثقة ٩٥٪

٠,٨٧٤ ، ٠,٩٢٦ بدرجة ثقة ٩٥٪

وبضرب النسب السابقة في ١٠٠ لتحويلها لنسب مئوية نجد أن:

النسبة العامة للنجاح في مادة الإحصاء تتراوح بين:

٨٧,٤٪ ، ٩٢,٦٪ بدرجة ثقة ٩٥٪

كما تتراوح نسبة النجاح في مادة الإحصاء عامة بين:

$$\hat{ح} \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}}$$ بدرجة ثقة ٩٩٪

$$٠,٩٠ \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{٠,٩ \times ٠,١}{٥٠٠}}$$ بدرجة ثقة ٩٩٪

٠,٩٠ ± ٢,٥٨ × ٠,٠١٣٤ بدرجة ثقة ٩٩٪

٠,٩٠ ± ٠,٠٣٤٦ بدرجة ثقة ٩٩٪

٠,٨٦٥٤ ، ٠,٩٣٤٦ بدرجة ثقة ٩٩٪

وبضرب النسب السابقة في ١٠٠ لتحويلها لنسب مئوية نجد أن:

النسبة العامة للنجاح في مادة الإحصاء تتراوح بين:

٨٦,٥٤٪ ، ٩٣,٤٦٪ بدرجة ثقة ٩٩٪

مثال (٢):

بلغت نسبة الأميين في عينة من قرى الريف المصري حجمها ١٠٠٠٠ فرداً ٤٠٪ احسب عند مستوي معنوية ∝ = ١٪ نسبة الأميين في مجتمع الريف المصري عموماً.

الحل:

ح̂ = ٠,٤٠ ∴ ل̂ = ١ − ح̂ = ١ − ٠,٤ = ٠,٦ ، ن = ١٠٠٠٠

∝ = ٠,٠١ ∴ درجة الثقة = ١ − ∝ = ١ − ٠,٠١ = ٩٩٪

∴ نسبة الأميين في مجتمع الريف المصري تتراوح بين:

$$\text{ح̂} \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{\text{ح̂ ل̂}}{\text{ن}}} \quad \text{بدرجة ثقة ٩٩٪}$$

$$٠,٤٠ \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{٠,٦ \times ٠,٤}{١٠٠٠}} \quad \text{بدرجة ثقة ٩٩٪}$$

$$٠,٤٠ \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{٠,٠٠٢٤} \quad \text{بدرجة ثقة ٩٩٪}$$

٠,٤٠ ± ٢,٥٨ × ٠,٠٠٥ بدرجة ثقة ٩٩٪

٠,٤٠٠٠ ± ٠,٠١٢٩ بدرجة ثقة ٩٩٪

٠,٣٨٧١ ، ٠,٤١٢٩ بدرجة ثقة ٩٩٪

وبتحويل النسب السابقة لنسب مئوية بضربها في ١٠٠

∴ نسبة الأميين في مجتمع الريف المصري عموماً تتراوح بين:

٣٨,٧٪ ، ٤١,٣٪ بدرجة ثقة ٩٩٪

مثال (٣):

بلغت نسبة العاطلين في عينة من المجتمع المصري حجمها ٥٠٠٠ فرداً ٦٪ قدر نسبة العاطلين في المجتمع المصري عموماً وذلك عند مستوي

معنوية ٥٪ وإذا كان سكان مصر في تاريخ معين يبلغ ٦٥ مليون نســمة قدر عدد المتعطلين في المجتمع المصري عموماً في هذا التاريخ.

الحل:

$\hat{ح} = ٠,٠٦$ ∴ $\hat{ل} = ١ - \hat{ح} = ١ - ٠,٠٦ = ٠,٩٤$

، ن = ٥٠٠٠

$\propto = ٠,٠٥$ ∴ درجة الثقة = $١ - \propto = ١ - ٠,٠٥ = ٩٥٪$

نسبة العاطلين في المجتمع المصري عموماً تتراوح بين:

$\hat{ح} \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$٠,٠٦ \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{٠,٠٦ \times ٠,٩٤}{٥٠٠٠}}$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$٠,٠٦ \pm ١,٩٦ \times ٠,٠٠٣٣٥٨٥٧$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$٠,٠٦٠٠٠ \pm ٠,٠٠٦٥٨$ بدرجة ثقة ٩٥٪

٠,٠٥٣٤٢ ، ٠,٠٦٦٥٨ بدرجة ثقة ٩٥٪

وبتحويل النسب السابقة لنسب مئوية بضربها في ١٠٠

∴ نسبة العاطلين في المجتمع المصري عموماً تتراوح بين:

٥,٣٤٪ ، ٦,٦٦٪ بدرجة ثقة ٩٥٪

ويكون الحد الأدني لعدد العاطلين في مصر في ذلك التاريخ =

$٦٥ \times ٠,٠٥٣٤٢ = ٣,٤٧$ مليون نسمة

ويكون الحد الأعلي لعدد العاطلين في مصر في ذلك التاريخ =

٦٥ × ٠,٠٦٦٥٨ = ٤,٣٣ مليون نسمة

و ذلك بدرجة ثقة ٩٥٪

الفصل الثاني
اختبارات الفروض الإحصائية
Testing Statistical Hypothesis

الفرض الإحصائي:

هو تفسير مبدئي أولي للباحث عن الظاهرة محل الدراسة ويعتمـد هـذا التفسير علي الاستنباط أو الاستنتاج , كما يحتمل هذا التفسير صـحة أو خطأ الفرض الإحصائي المبدئي , وسوف تقتصر اختبـارات الفـروض الإحصائية في هذا الفصل علي الوسط الحسابي أو علي النسبة المحسوبان من عينة عشوائية , وسوف يكون أما الباحث دائماً فرضان أساسيان هما:

(١) الفرض العدمي: Null Hypothesis

ويرمز له بالرمز (H_0) ويمكن تعريبه إلي (ض.) فعند المقارنة بين نتائج العينة ونتائج المجتمع يفترض الباحث أن الوسط الحسابي للعينة أو النسبة في العينة لا يختلفان عن الوسط الحسابي للمجتمع أو النسبة في المجتمـع أي تنعدم الفروق بين نتائج العينة ونتائج المجتمـع فتتطـابق أو تتشـابه النتائج في العينة مع نتائج المجتمع تماماً وأي فروق ظاهرة نتيجة دراسة العينات تعتبر فروق بسيطة أو فروق غير جوهرية وغير معنوية وترجع لخطأ الصدفة أو الخطأ العشوائي.

وعند المقارنة بين نتائج مجتمعين (وسطين حسـابيين أو نسـبتين) مـن بيانات عينتين فيعني فرض العدم أن نتائج المجتمعـين متشـابهة تمامـاً والفروق الظاهرة غير جوهرية وغير معنوية وترجع لخطأ الصـدفة أو الخطأ العشوائي.

(٢) الفرض البديل: Alternative Hypothesis

ويرمز له بالرمز (H_1) ويمكن تعريبه إلي (ض١) فعند المقارنة بين نتائج العينة ونتائج المجتمع يفترض الباحث أن الوسط الحسابي للعينة أو النسبة في العينة يختلفان عن الوسط الحسابي للمجتمع أو النسبة في المجتمع والفروق الظاهرة بين نتائج العينة والمجتمع فروق جوهرية وحقيقية ولا ترجع لخطأ الصدفة أو الخطأ العشوائي.

وعند المقارنة بين نتائج مجتمعين (وسطين حسابين أو نسبتين) من بيانات عينتين فيعني الفرض البديل أن نتائج المجتمعين مختلفة تماماً والفروق الظاهرة فروق جوهرية وحقيقية ولا ترجع لخطأ الصدفة أو الخطأ العشوائي ولكنها ترجع لاختلاف فعلي في تركيب أو توصيف المجتمعين.

العينات الكبيرة:

وهي العينات التي يزيد حجمها عن ٣٠ مفردة أو تزيد عن ٥٪ من حجم المجتمع الأصلي.

أولاً: مقارنة عينة بمجتمع:

بفرض أننا سحبنا عينة من مجتمع وكانت نتائج المجتمع معلومة لدينا , وبفرض أن هذه النتائج عبارة عن مركز المجتمع سواء كان وسط حسابي أو نسبة , وتم حساب الوسط الحسابي للعينة أو النسبة للعينة والمطلوب مقارنة نتائج العينة بنتائج المجتمع لإجراء الاختبارات التالية:

١ – اختبار مدى عشوائية العينة.

٢ – اختبار انتماء العينة لمجتمع معين.

٣ – اختبار تأثير مؤثر معين.

القاعدة:

نقوم بحساب فترة ثقة مناسبة من بيانات المجتمع ســـواء كانـــت متعلقـــة بالوسط الحسابي أو بالنسبة , ثم نقارن الوسط الحسابي للعينة أو النســـبة في العينة بفترة الثقة المحسوبة , فإذا وقع الوسط الحسابي أو النسبة داخل فترة الثقة نقبل الفرض العدمى (ض.) وحسب نوعية الاختبار يمكـــن أن نصل إلي إحدى النتائج التالية:

١ – العينة تعتبر عشوائية وممثلة تمثيلاً جيداً للمجتمع ونستكمل بها باقي الدراسات الوصفية والتحليلية المطلوبة.

٢ – العينة تنتمي لهذا المجتمع وتمثله تمثيلاً جيداً ولا تنمي لمجتمعـــات أخرى لا تقع في مجالها.

٣ – المؤثر الخارجي الذي أثرنا به علي العينة لم يغير من نتائج العينـــة ومازالت في مجال المجتمع ومتشابهة معه تماماً في النتائج.

أما إذا وقع الوسط الحسابي أو النسبة خارج فترة الثقة نقبل الفرض البديل (ض١) وحسب نوعية الاختبار يمكن أن نصل إلي إحدى النتائج التالية:

١ – العينة غير عشوائية وغير ممثلة للمجتمع وتحوى خطأ تحيـــز ولا نستطيع استكمال الدراسة بها ولابد من مراجعتهـــا وتصـــحيحها أو تعديلها.

٢ – العينة لا تنتمي لهذا المجتمع ولكنها تنتمي لمجتمع آخر أو مسحوبة من مجتمع آخر.

٣ – المؤثر الذي أثرنا به علي العينة أثر وغير نتـــائج العينـــة بحيـــث اختلفت عن نتائج المجتمع وإذا كان للمؤثر تأثير إيجابي فلابد مـــن تطبيقه أو تعميمه.

ملاحظة:

يمكن حساب فترة الثقة المناسبة من واقع بيانات العينة سواء كانت الفترة محسوبة علي أساس الوسط الحسابي أو النسبة ثم نقارن نتائج المجتمـــع (وسط حسابي أو نسبة) بفترة الثقة السابقة فإذا وقعت نتائج المجتمع داخل فترة الثقة نقبل فرض العدم (ض.) وإذا وقعت نتائج المجتمع خارج فترة الثقة نقبل الفرض البديل (ض١) ونصل لنفس النتائج الثلاث السابقة.

مثال (١):

بلغ متوسط طول الطالب في مجتمع طلبة كلية التجارة – جامعة القـــاهرة في العام الجامعي ٢٠١٢/٢٠١٣ – ١٦٩ سم بانحراف معيـــاري قـــدره ٥٠سم , سحبنا عينة من طلبة الكلية حجمها ١٠٠٠ طالب وتـــم حســـاب متوسط الطول في العينة فوجد أنه ١٧٢ سم ، هل يمكن الحكم علـــي أن هذه العينة عشوائية وممثلة لطلبة كلية التجارة أم لا؟ وذلك عند مســـتوي معنوية ١٪ ، ٥٪

الحل:

م = ١٦٩ سم   سَ = ١٧٢ سم

عَ = ٥٠ سم   ن = ١٠٠٠

α = ١٪ ، α = ٥٪

∴ درجة الثقة = ١ − $\propto$ ، درجة الثقة = ١ − $\propto$

= ١ − ٠,٠١ = ٩٩٪ ، = ١ − ٠,٥ = ٩٥٪

ملاحظة هامة:

نكون أولاً فترة ثقة مناسبة عند احتمال أو درجة ثقة ٩٥٪ من مركز المجتمع فإذا وقع الوسط الحسابي سَ داخل هذه الفترة يعتبر بديهي أن يقع داخل فترة الثقة الأكبر عند احتمال أو درجة ثقة ٩٩٪ ولا نحتاج لحساب هذه الفترة , أما إذا وقع الوسط الحسابي خارج فترة الثقة الأولي علي أساس احتمال أو درجة ثقة ٩٥٪ لابد من حساب الفترة الثانية علي أساس احتمال أو درجة ثقة ٩٩٪ فقد يقع داخلها أو خارجها , فإذا وقع داخل فترة الثقة ٩٩٪ وخارج فترة الثقة ٩٥٪ في هذه الحالة يكون هناك شك في عشوائية العينة أو شك في انتمائها لهذا المجتمع.

حساب فترة ثقة مناسبة عن مستوي معنوية $\propto$ = ٥٪ أو درجة ثقة ٩٥٪ ومن واقع مركز المجتمع (م) كما يلي:

$$م \pm ١,٩٦ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}$$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$$١٦٩ \pm ١,٩٦ \times \frac{٥٠}{\sqrt{١٠٠٠}}$$ بدرجة ثقة ٩٥٪

١٦٩ ± ١,٩٦ × ١,٥٨ بدرجة ثقة ٩٥٪

١٦٩ ± ٣,٠٩٩ بدرجة ثقة ٩٥٪

١٦٥,٩سم ، ١٧٢,١ سم بدرجة ثقة ٩٥٪

وبما أن الوسط الحسابي للعينة $\bar{س}$ = ١٧٢ يقع داخل فترة الثقة السابقة فبديهي أن يقع في فترة الثقة الأكبر والتي تحسب علي أساس درجة ثقة ٩٩٪ وبالتالي لا نحتاج لحساب هذه الفترة , إذن العينة عشوائية وتنتمي لطلبة كلية التجارة أي نقبل فرض العدم.

ملاحظة هامة:

يمكن إعادة حل المثال السابق بطريقة عكسية بأن تحسب فترة ثقة مناسبة علي أساس الوسط الحسابي للعينة ونصل لنفس النتيجة السابقة كما يلي:

$$\bar{س} \pm ١,٩٦ \times \frac{ع'}{\sqrt{ن}}$$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$$١٧٢ \pm ١,٩٦ \times \frac{٥٠}{\sqrt{١٠٠٠}}$$ بدرجة ثقة ٩٥٪

١٧٢ ± ٣,٠٩٩ بدرجة ثقة ٩٥٪

١٦٨,٩سم ، ١٧٥,١ سم بدرجة ثقة ٩٥٪

ثم نقارن الوسط الحسابي للمجتمع (م) = ١٦٩ سم بفترة الثقة السابقة , نجد أنه يقع داخل هذه الفترة وبالتالي فبديهي أن يقع داخل فترة الثقة الأكبر إذا تم حسابها علي أساس احتمال أو درجة ثقة ٩٩٪ إذن هذه العينة عشوائية وتنتمي لهذا المجتمع.

مثال (٢):

بلغت نسبة وفيات الأطفال الرضع في مصر خلال السنة الميلادية ٢٠١٠ = ١٢٪ سحبنا عينة من الأطفال الرضع عددها ٥٠٠ طفل وتم مراقبة هذه العينة لمدة سنة ثم حسب عدد الوفيات من بين أطفال هذه العينة خلال

السنة فبلغ ٤٠ طفلاً , هل يمكن القول أن هذه العينة عشوائية وممثلـــة أم لا؟ وذلك بدرجة ثقة ٩٩٪

الحل:

ح = ٠,١٢ ل = ١ – ٠,١٢ = ٠,٨٨ ن = ٥٠٠

$$\hat{ح} = \frac{٤٠}{٥٠٠} = ٠,٠٨$$

$$\hat{ل} = ١ - ٠,٠٨ = ٠,٩٢$$

تحسب فترة ثقة مناسبة من النسبة في المجتمع (ح) كما يلي:

$$ح \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{ح ل}{ن}}$$ بدرجة ثقة ٩٩٪

$$٠,١٢ \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{٠,١٢ \times ٠,٨٨}{٥٠٠}}$$ بدرجة ثقة ٩٩٪

٠,١٢ ± ٢,٥٨ × ٠,٠١٤٥ بدرجة ثقة ٩٩٪

٠,١٢ ± ٠,٠٣٧٥ بدرجة ثقة ٩٩٪

٠,٠٨٢٥ ، ٠,١٥٧٥ بدرجة ثقة ٩٩٪

وبتحويل النسب السابقة إلي نسب مئوية بالضرب في ١٠٠

٨,٢٥٪ ، ١٥,٧٥٪

و بما أن النسبة في العينة ٨٪ تقع خارج فترة الثقة إذن نقبـل الفـرض البديل بأن هذه العينة غير عشوائية أو أن هذه العينة لا تمثل سكان مصر.

مثال (٣):

بلغ متوسط إنتاج العامل اليومي في إحدى الصناعات ٦٠ قطعة يومياً , فإذا كان تباين عدد القطع المنتجة يومياً في هذه الصناعة ١٤٤ قطعة , سحبنا عينة من عمال المصنع عددها ٥٠ عاملاً وأعد لهم برامج تدريبية متقدمة في الأساليب المختلفة للإنتاج وبعد انتهاء البرامج التدريبية تم قياس متوسط إنتاج العامل في العينة المدربة فوجد أنه ارتفع إلي ٦٦ قطعة يوميا , هل يمكن القول أن البرامج التدريبية أثرت ومفيدة ورفعت متوسط إنتاج العامل اليومي فعلاً ونوصي بتعميمها أم أن هذه الزيادة زيادة ظاهرية وغير حقيقية , وذلك بفرض أن مستوي المعنوية $\propto$ = ١٪

الحل:

م = ٦٠ قطعة $ع^{٢}$ = ١٤٤ قطعة   ∴ ع = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ قطعة

$\bar{س}$ = ٦٦ قطعة   ن = ٥٠ عامل $\propto$ = ١٪

∴ درجة الثقة = ١ – ٠,٠١ = ٠,٩٩

تحسب فترة ثقة مناسبة من الوسط الحسابي للمجتمع (م) كما يلي:

م ± ٢,٥٨ × $\frac{ع}{\sqrt{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٩٪

٦٠ ± ٢,٥٨ × $\frac{١٢}{\sqrt{٥٠}}$ بدرجة ثقة ٩٩٪

٦٠ ± ٤,٤   بدرجة ثقة ٩٩٪

٥٥,٦ ، ٦٤,٤   بدرجة ثقة ٩٩٪

∵ متوسط الإنتاج بعد التدريب ٦٦ قطعة يومياً يقع خارج فترة الثقة

∴ نقبل الفرض البديل بأن هناك زيادة حقيقية وجوهرية نتيجة التـــدريب ولذلك نوصي بتعميميه.

ثانياً: المقارنة بين مركزي مجتمعين من بيانات عينتين:

Testing the Difference of Two Means

إذا سحبنا عينتان كبيرتان من مجتمعين مختلفين بحيث أن حجم العينتـــين معاً يزيد عن ٣٠ مفردة أو يزيد عن ٥٪ عن حجم المجتمع الأصـــلي , وتم حساب الوسط الحسابي لكل عينة أو النسبة لكل عينـــة والمطلـــوب اختبار الفرق بين مركزي المجتمعين الأصليين من واقع بيانات العينتين:

١ – الفرض العدمي: (ض.)

ويعني هذا الفرض أنه لا يوجد فرق حقيقي أو جوهري بـــين مركـــزي المجتمعين والمجتمعين متشابهين تماماً والفرق الظـــاهر بـــين مركـــزي العينتين فرق بسيط ويرجع لخطأ الصدفة أو الخطأ العشوائي.

٢ – الفرض البديل: (ض١)

ويعني هذا الفرض وجود اختلاف حقيقـــي وجـــوهري بـــين مركـــزي المجتمعين والفرق الظاهر بين مركزي العينتين فـــرق حقيقـــي ويرجـــع لاختلاف فعلي بين المجتمعين.

(١) إذا كان مركزي المجتمعين علي شكل الوسط الحسابي:

الخطوات:

١ – نحسب الخطأ المعياري المشترك المطلق للفرق بين المتوسطين باستخدام القانون التالي:

$$ع_{س_1 - س_2} = د \times \sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}$$

ويطلق علي (د) الدرجة المعيارية وتتحدد قيمتها علي أساس مستوي المعنوية أو درجة الثقة ومن واقع جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي.

٢ – نوجد الفرق المطلق بين المتوسطين $|\bar{س}_1 - \bar{س}_2|$

٣ – نقارن الفرق المطلق بين المتوسطين بالخطأ المعياري المشترك:

أ – إذا كان الفرق المطلق أقل من الخطأ المعياري نقبل الفرض العدمي (ض.) بأن المجتمعين متشابهين تماماً والفرق الظاهر بين متوسطي العينتين فرق بسيط وغير جوهرى ويرجع لخطأ الصدفة أو الخطأ العشوائي.

ب– إذا كان الفرق المطلق أكبر من الخطأ المعياري نقبل الفرض البديل (ض١) بأن المجتمعين مختلفين تماماً والفرق الظاهر بين متوسطي العينتين فرق حقيقي وجوهري ويرجع ذلك لاختلاف حقيقي بين مركزي المجتمعين.

ويمكن بطريقة أخرى حساب المقدار التالي:

$$\bar{د} = \frac{| س_1 - س_2 |}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}}$$

ويطلق علي ($\bar{د}$) الدرجة المعيارية المحسوبة وتقارن بـ (د) الدرجة المعيارية الجدولية والمحسوبة من جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي وعلي أساس مستوي معنوية معين (∝) ويلاحظ الآتي:

أ – إذا كانت ($\bar{د}$) المحسوبة أقل من (د) الجدولية نقبل الفرض العدمي (ض.) بأن المجتمعين متشابهين تماماً.

ب– إذا كانت ($\bar{د}$) المحسوبة أكبر من (د) الجدولية نقبل الفرض البديل (ض$_1$) بأن المجتمعين مختلفين تماماً.

مثال (١):

أجرى اختباراً بين عينتين من الرجال والنساء لقياس مستوي تحصيلهم في اللغات عند مستوي معنوية (∝) = ١٪ وكانت نتائج العينتين كما يلي:

عينة الرجال	عينة النساء
$ن_1$ = ١٢٠ رجل	$ن_2$ = ١٨٠ سيدة
$\bar{س}_1$ = ١٩,٥ درجة	$\bar{س}_2$ = ٢١ درجة
$ع_1^2$ = ٣٦ درجة	$ع_2^2$ = ٢٥ درجة

الحل:

عند مستوي معنوية ∝ = ١٪ نجد أن درجة الثقة = ٩٩٪

ونجد أن الدرجة المعيارية الجدولية (د) من واقع الجدول = ± ٢,٥٨

∴ الدرجة المعيارية المطلقة = ٢,٥٨

- $ع_{\overline{س}_١ - \overline{س}_٢} = د \times \sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}$

$$= ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{٣٦}{١٢٠} + \frac{٢٥}{١٨٠}}$$

$$= ٢,٥٨ \times ٠,٦٦٢٥ = ١,٧١$$

- نوجد الفرق بين المتوسطين (المطلق) = $|\overline{س}_١ - \overline{س}_٢|$

$$= |١٩,٥ - ٢١|$$

$$= |١,٥|$$

- نقارن الفرق بين المتوسطين المطلق ١,٥ بالخطأ المعياري المشترك المطلق ١,٧١ بما أن الفرق بين المتوسطين أصغر من الخطأ المعياري ∴ نقبل الفرض العدمي (ض.) بأن المجتمعين متشابهين تماماً ويمكن القول أن مستوي تحصيل اللغات عند الرجال والنساء متعادل تماماً والفرق الظاهر بين متوسطي الدرجات فرق بسيط وغير جوهري ويرجع لخطأ الصدفة نتيجة دراسة العينات.

حل آخر للمثال السابق:

$$\bar{د} = \frac{|\bar{س}_1 - \bar{س}_2|}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}}$$

$$= \frac{|١٩,٥ - ٢١|}{\sqrt{\frac{٣٦}{١٢٠} + \frac{٢٥}{١٨٠}}} = |٢,٢٦|$$

تقارن الدرجة المعيارية المحسوبة ($\bar{د}$) بالدرجة المعيارية الجدولية (د) عند مستوي معنوية α = ١٪ أي بالرقم |٢,٥٨|

∵ المحسوبة أقل من الجدولية إذن نقبل الفرض العدمى بأن المجتمعين متشابهين تماماً أي أن مستوي تحصيل اللغات عند الرجال والنساء متشابه تماماً.

مثال (٢):

قارن بين متوسط الأجر في المصنعين أ , ب من واقع بيانات العينتين التاليتين وذلك باحتمال أو درجة ثقة ٩٥٪

عينة عمال مصنع (أ)	عينة عمال مصنع (ب)
$ن_1$ = ١٠٠ عامل	$ن_2$ = ١٥٠ عامل
$\bar{س}_1$ = ١٥٠ جنيه	$\bar{س}_2$ = ١٦٥ جنيه
$ع_1$ = ٢٠ جنيه	$ع_2$ = ٢٥ جنيه

هل يمكن القول أن متوسط الأجور لعمال مصنع (ب) أكبر منه لعمال مصنع (أ)

الحل:

- $$ع_{\bar{س}_1 - \bar{س}_2} = د \times \sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}$$

حيث د المطلقة من جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي عند مستوي معنوية ٥٪ = ١,٩٦

$$\therefore \quad ع_{\bar{س}_1 - \bar{س}_2} = ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{٤٠٠}{١٠٠} + \frac{٦٢٥}{١٥٠}}$$

$$= ١,٩٦ \times ٢,٨٥٧٧ = ٥,٦$$

- نوجد الفرق المطلق بين المتوسطين $= |\bar{س}_1 - \bar{س}_2|$

$$= |١٥٠ - ١٦٥|$$

$$= |١٥|$$

- بما أن الفرق بين المتوسطين المطلق |١٥| أكبر من الخطأ المعياري المشترك المطلق |٥,٦| إذن نقبل الفرض البديل بأن متوسط الأجر في المصنعين مختلف تماماً ويمكن قبول الفرض القائل بأن متوسط الأجر لعمال مصنع (ب) أكبر منه لعمال مصنع (أ)

حل آخر:

$$د = \frac{|\bar{س}_1 - \bar{س}_2|}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}}$$

$$= \frac{|١٥٠ - ١٦٥|}{\sqrt{\frac{٤٠٠}{١٠٠} + \frac{٦٢٥}{١٥٠}}} = \frac{|١٥|}{٢,٨٥٧٧}$$

$$= |٥,٢٥|$$

نقارن الدرجة المعيارية المحسوبة ($\bar{د}$) = |٥,٢٥| بالدرجة المعيارية الجدولية (د) = |١,٩٦| بما أن المحسوبة أكبر من الجدولية إذن نقبل الفرض البديل بأن المجتمعين مختلفين تماماً وأن متوسط الأجر لعمال مصنع (ب) أعلي منه لعمال مصنع (أ)

(٢) إذا كان مركزى المجتمعين علي شكل نسبة:

الخطوات:

- نحسب الخطأ المعياري المشترك المطلق للفرق بين النسبتين باستخدام القانون التالي:

$$ع_{\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2} = د \times \sqrt{\frac{\hat{ح}_1 \hat{ل}_1}{ن_1} + \frac{\hat{ح}_2 \hat{ل}_2}{ن_2}}$$

- نوجد الفرق المطلق بين النسبتين = $|\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2|$
- نقارن الفرق المطلق بين النسبتين بالخطأ المعياري المشترك المطلق ويترتب علي ذلك ما يلي:

أ – إذا كان الفرق المطلق أصغر من الخطأ المعياري المشـــترك نقبل الفرض العدمي (ض.) بأن المجتمعين متشابهين تمامـــاً والفرق الظاهر بين نسبتي العينتين فرق بسيط وغير جوهرى ويرجع لخطأ الصدفة.

ب – إذا كان الفرق المطلق أكبر من الخطأ المعياري المشترك نقبل الفرض البديل (ض$_1$) بأن المجتمعين مختلفين تماماً والفـــرق الظاهر بين النسبتين فرق حقيقي وجوهرى ويرجع لاختلاف حقيقي بين المجتمعين.

كما يمكن بطريقة أخرى حساب المقدار التالي:

$$\bar{د} = \frac{|\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2|}{\sqrt{\frac{\hat{ح}_1 \hat{ل}_1}{ن_1} + \frac{\hat{ح}_2 \hat{ل}_2}{ن_2}}}$$

ويتم مقارنة الدرجة المعيارية المحسوبة ($\bar{د}$) بالدرجة المعيارية الجدولية (د) والمستخرجة من جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعـــي وحســـب مستوي المعنوية $\propto$ أو درجة الثقة المناسبة والمعطاه ويترتب علي ذلك ما يلي:

أ – إذا كانت ($\bar{د}$) المحسوبة أصغر من (د) الجدولية تقبل الفرض العدمي (ض.) بأن المجتمعين متشابهين تماماً.

ب– إذا كانت ($\bar{د}$) المحسوبة أكبر من (د) الجدولية نقبل الفرض البديل (ض١) بأن المجتمعين مختلفين تماماً.

مثال (٣):

قارن بين نسبة الوحدات الجيدة في المصنعين أ , ب من واقع بيانات العينتين التاليتين وذلك عند مستوي معنوية ∝ = ١٪

عينة مصنع (أ)	عينة مصنع (ب)
ن١ = ١٠٠ قطعة	ن٢ = ١٠٠ قطعة
عدد القطع الجيدة = ٩٥ قطعة	عدد القطع الجيدة = ٩٣ قطعة

الحل:

نسبة الوحدات الجيدة في عينة مصنع (أ)

$$\hat{ح}_١ = \frac{٩٥}{١٠٠} = ٠,٩٥$$

∴ نسبة الوحدات الرديئة في عينة مصنع (أ)

$$\hat{ل}_١ = ١ - ٠,٩٥ = ٠,٠٥$$

نسبة الوحدات الجيدة في عينة مصنع (ب)

$$\hat{ح}_٢ = \frac{٩٣}{١٠٠} = ٠,٩٣$$

∴ نسبة الوحدات الرديئة في عينة مصنع (ب)

$\hat{ل}_{٢} = ١ - ٠,٩٣ = ٠,٠٧$

(١) $ع_{\hat{ح}_١ - \hat{ح}_٢} = د \times \sqrt{\frac{\hat{ح}_١ \hat{ل}_١}{ن_١} + \frac{\hat{ح}_٢ \hat{ل}_٢}{ن_٢}}$

$= ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{٠,٩٥ \times ٠,٠٥}{١٠٠} + \frac{٠,٩٣ \times ٠,٠٧}{١٠٠}}$

$= ٢,٥٨ \times ٠,٠٣٣٥٦ = ٠,٠٨٦٥٧$

(٢) نوجد الفرق المطلق بين النسبتين = $|\hat{ح}_١ - \hat{ح}_٢|$

$= |٠٩٥ - ٠,٩٣| = |٠,٠٢|$

(٣) بما أن الفرق المطلق بين النسبتين أقل من الخطأ المعياري المشترك المطلق إذن يمكن قبول الفرض العـــدمي (ض.) بـــأن المجتمعـــين متشابهين تماماً وأن نسبة الوحدات الجيدة متطابقة في المصنعين.

<u>حل آخر:</u>

$$\bar{د} = \frac{|\hat{ح}_١ - \hat{ح}_٢|}{\sqrt{\frac{\hat{ح}_١ \hat{ل}_١}{ن_١} + \frac{\hat{ح}_٢ \hat{ل}_٢}{ن_٢}}}$$

$$= \frac{|٠,٩٥ - ٠,٩٣|}{\sqrt{\frac{٠,٩٥ \times ٠,٠٥}{١٠٠} + \frac{٠,٩٣ \times ٠,٠٧}{١٠٠}}}$$

$$= \frac{|٠,٠٢|}{٠,٠٣٣٥٦} = |٠,٥٩٥٩|$$

∵ (د) الجدولية المطلقة عند مستوي معنوية = ∝ ١٪ هي ٢,٥٨

∴ ($\bar{د}$) المحسوبة أصغر من (د) الجدولية.

∴ نقبل الفرض العدمي بأن نسبة الوحدات الجيدة في المصنعين متطابقة تماماً والفرق الظاهر غير حقيقي ويرجع لخطأ الصدفة نتيجة دراسة العينات.

مثال (٤):

قارن بين نسبتي النجاح في مادة الإحصاء لطلبة كلية التجارة – جامعة القاهرة وطلبة كلية التجارة – جامعة عين شمس عن العام الدراسي ٢٠١٢/٢٠١٣ وعند مستوي معنوية ∝ = ٥٪ وذلك من واقع بيانات العينتان التاليتان:

عينة طلبة تجارة القاهرة	عينة طلبة تجارة عين شمس
عدد الطلبة = ٢٠٠ طالباً	عدد الطلبة = ١٥٠ طالباً
عدد الناجحين في مادة الإحصاء = ١٦٠ طالباً	عدد الناجحين في مادة الإحصاء = ١١٧ طالباً

الحل:

$\hat{ح}_1 = \frac{١٦٠}{٢٠٠} = ٠,٨٠$ ∴ $ل_1 = ١ - ٠,٨٠ = ٠,٢٠$

$\hat{ح}_2 = \frac{١١٧}{١٥٠} = ٠,٧٨$ ∴ $ل_2 = ١ - ٠,٧٨ = ٠,٢٢$

، د المطلقة عند درجة ثقة ٩٥٪ = ١,٩٦

(١) $ع_{\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2} = د \times \sqrt{\frac{\hat{ح}_1 \hat{ل}_1}{ن_1} + \frac{\hat{ح}_2 \hat{ل}_2}{ن_2}}$

$= ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{٠,٨٠ \times ٠,٢٠}{٢٠٠} + \frac{٠,٧٨ \times ٠,٢٢}{١٥٠}}$

$= ١,٩٦ \times ٠,٠٤٤ = ٠,٠٨٦$

(٢) نوجد الفرق المطلق بين النسبتين = $|\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2|$

$= |٠,٨ - ٠,٧٨| = ٠,٠٢$

(٣) بما أن الفرق المطلق أصغر من الخطأ المعياري المشترك المطلق للنسبتين نقبل الفرض العدمي (ض.) بأن المجتمعين متشابهين تماماً وأن نسبة النجاح في مادة الإحصاء في الكليتين متشابهة والفرق الظاهر بين النسبتين راجع لخطأ الصدفة نتيجة دراسة العينات.

حل آخر:

$$\bar{د} = \frac{|\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2|}{\sqrt{\frac{\hat{ح}_1 \hat{ل}_1}{ن_1} + \frac{\hat{ح}_2 \hat{ل}_2}{ن_2}}}$$

$$= \frac{|٠,٨٠ - ٠,٧٨|}{\sqrt{\frac{٠,٨ \times ٠,٢}{٢٠٠} + \frac{٠,٧٨ \times ٠,٢٢}{١٥٠}}}$$

$$= \frac{|٠,٠٢|}{٠,٠٤٤} = |٠,٤٥|$$

∵ ($\bar{د}$) المحسوبة = ٠,٤٥ أصغر من (د) الجدولية = ١,٩٦

∴ نقبل الفرض العدمي بأن المجتمعين متشابهين تماماً.

تمارين على الباب الثامن

١ – فئات الأجر ١٠٠- ١٥٠- ٢٠٠- ٢٥٠- ٣٠٠- ٣٥٠-٤٠٠

عينة العمال ٨٠ ١٢٠ ١٠٠ ٥٠ ٣٠ ٢٠

المطلوب:

أ- حساب متوسط الأجر والتباين والانحراف المعياري للعينة السابقة.

ب- قدر بفترة ثقة ٩٥٪ متوسط الأجر في المصنع عموماً.

٢ – إذا كان متوسط طول الطالب بكلية التجارة دفعة ٢٠١٢/٢٠١٣ – ١٧٠سم، أُخذت عينة حجمها ١٠٠ طالب وحُسب متوسط طول الطالب في العينة فوُجد أنه ١٦٨سم ، هل هذه العينة عشوائية وتنتمي لطلبة كلية التجارة لنفس الدفعة أم لا ؟ وذلك بفرض أن تباين أطوال الطلبة ٣٦سم وذلك عند مستوى معنوية $\propto$ = ١٪

٣ – سحبت عينة من عمال مصنع حجمها ١٠٠ عامل وحُسب متوسط إنتاج العامل في العينة فبلغ ٢٠ قطعة يومياً بانحراف معياري قدره ٤ قطع ، قدر بفترة ثقة ٩٥٪ متوسط إنتاج العامل في المصنع عموماً.

٤ – بلغ متوسط إنتاج فدان القطن في محافظة البحيرة ٨ قنطار، أُخذت عينة حجمها ٥٠ فدان وتم تجربة نوع جديد من السماد لزيادة حجم المحصول على هذه العينة وبعد استخدامه زاد متوسط إنتاج الفدان في العينة إلى ٩ قنطار ، وبفرض أن تباين الإنتاج عموماً في المحافظة يبلغ ١٦ قنطاراً ، هل يمكن القول أن هذا النوع الجديد من

السماد رفع متوسط الإنتاجية فعلاً ونوصي بتعميمه أم أن الزيادة في متوسط الإنتاجية بسيطة وترجع لخطأ الصدفة ؟ وذلك بفـــرض أن مستوى المعنوية $\propto$ = ١٪

٥ – سحبت عينة من إنتاج مصنع حجمها ١٠٠ قطعة وتم فرزها فوجـــد أن بها عدد ٥ قطع تالفة ، اختبر صحة الفرض القائل بـــأن هـــذه العينة غير عشوائية إذا كانت النسبة النمطية للوحدات الجيـــدة فـــي المصنع عموماً لا تقل عن ٩٠٪ وذلك بدرجة ثقة ٩٩٪

٦ –

فئات الوزن بالجرام	٥-	١٠-	١٦-	٢٠-	٣٠-	٤٥-٥٠
عدد الوحدات	٥٠	١٢٥	٢٢٥	٧٠	٢٠	١٠

المطلوب:

أ- أرسم منحنى المتجمع الهابط واستنتج منه وسيط الوزن.

ب- أحسب نسبة عدد الوحدات التي تقل أوزانها عن ٢٥جرام من الرسم السابق ثم استنتج منها النسبة العامة في المصنع عموماً بدرجة ثقة ٩٥٪

٧ – فيما يلي عينة تتكون من ١٠٠ شركة من شركات المســـاهمة فـــي السوق المصري وتوزيعها حسب فئات رأس المال بالمليون جنيه:

فئات رأس المال	٥-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٥٠-	١٠٠-١٥٠
عدد الشركات المساهمة	٨	١٥	٢٣	٢٨	٢٠	٦

قدر بفترة ثقة مناسبة متوســـط رأس المـــال المســـتثمر بالشـــركات المساهمة عموماً في السوق المصري عند مستوي معنوية $\propto$ = ١٪

٨ – في دراسة على عينة من أصحاب الشقق بمحافظة القاهرة حجمها ١٠٠٠ شقة لقياس الرغبة في شراء تأمين حريق وسطو على منازلهم أبدى منهم ١٥٠ شخصاً فقط الرغبة في شراء هذا النوع من التأمين ، قدر بدرجة ثقة ٩٩٪ نسبة الراغبين في التعاقد على هذا النوع من التأمين في محافظة القاهرة عموماً عند مستوي معنوية ∝ = ٥٪

٩ – مصنع يعمل به ١٠٠٠ عاملاً من بينهم ٧٠٠ عامل فوق سن الخامسة والثلاثين ، فإذا علمت أن ٦٠٪ من عمال جمهورية مصر العربية تزيد أعمارهم عن ٣٥ سنة ، هل يمكن الاستدلال بوجود فروق جوهرية بين هذه النسبة في المصنع ومثيلتها على مستوى الجمهورية وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪

١٠– بلغ متوسط الإنتاج اليومي في مصنع (أ) ٥٥ قطعة ومتوسط الإنتاج اليومي في مصنع (ب) ٤٥ قطعة ، سُحبت عينة حجمها ٦٠ عاملاً من أحد المصنعين ، وحُسب متوسط الإنتاج اليومي للعامل في هذه العينة فبلغ ٤٨ قطعة بانحراف معياري قدره ١٦ قطعة ، حدد من أي مصنع أُخذت أو تنتمي هذه العينة وذلك عند مستوى معنوية ∝ = ١٪

١١–

فئات العمر	١٨–	٢٥–	٣٠–	٤٠–	٥٠–٦٠
عدد المتعطلين في محافظة القاهرة بالألف	٥٠	١٢٥	٦٥	١٥	٥
عدد المتعطلين في محافظة الإسكندرية بالألف	٤٠	٩٥	٥٥	٧	٣

هل هناك اختلاف جوهري بين متوسط عمر العاطل في كل من محافظتي القاهرة والإسكندرية وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪

١٢- قارن بين نسبتي وفيات الذكور والإناث في محافظة القـــاهرة مـــن واقع بيانات العينتين التاليتين:

عينة الذكور	عينة الإناث
$ن_١$ = ١٠٠٠	$ن_٢$ = ١٢٠٠
عدد الوفيات = ١٢	عدد الوفيات = ١١

وذلك بدرجة ثقة ٩٩٪

التطبيقات

تطبيقات على الباب الأول

جمع وتصنيف وتبويب وعرض البيانات

التطبيق الأول:

عرف علم الإحصاء وتطوره وأهميته للعلوم الإنسانية

الإجابة:

أولاً: تعريف علم الإحصاء:

علم الإحصاء هو علم تجميع وتنظيم البيانات والمعلومات عــن طريــق تبويبها وعرضها ثم تلخيصها فى مقاييس ومؤشرات مما يفيد فى:

- تحديد العلاقات الإنسانية بين البيانات
- اكتشاف وتفسير الحقائق غير الظاهرة
- التنبؤ بالمستقبل بطرق علمية تحليلية منظمة

ثانياً: تطور علم الإحصاء:

- فى العصور القديمة كانت الحاجة إلى الإحصاء تتمثل فى الحاجة إلى حصر وعد السكان و موارد الدولة ونفقاتها
- فى العصور الوسطى تطور هذا العلم بسبب الحاجة إليه فى الحروب والغزوات لحصر الأفراد والمعدات وتحديد الضرائب وحصر وتسجيل أعداد المواليد والوفيات
- عند بداية القرن الثانى عشر توسع علم الإحصاء بسبب التطور فى علوم الرياضيات وخاصة فى نظرية الاحتمالات فبعد أن كان علم

الإحصاء قاصراً على الحصر والتجميع والتسجيل امتد ليشمل القياس والتحليل

- عند قيام الثورة الصناعية بدأ استخدام علم الإحصاء بتوسع فى الصناعة وذلك بعد الثورة الصناعية التى ظهرت فى بريطانيا ووسط أوروبا

ثالثاً: أهمية علم الإحصاء للعلوم الإنسانية:

تتمثل أهمية علم الإحصاء فى خدمته العلماء والباحثين فى البحوث والدراسات لحل مشاكل البيئة والمجتمع

وقد ساعد علم الإحصاء فى القيام بدوره فى التطور الكبير فى الحاسبات الآلية وقدرتها الفائقة فى استخدام البرامج الإحصائية ، بالإضافة إلى دور شبكات الانترنت فى سرعة نقل وتمرير المعلومات والحصول على البيانات المطلوبة للدراسات والأبحاث.

التطبيق الثانى:

حدد مراحل البحث الإحصائى

الإجابة:

مراحل البحث الإحصائى:

المرحلة الأولى: جمع البيانات من السجلات والقوائم أو من الميدان عن طريق قائمة استقصاء.

المرحلة الثانية: تصنيف وتبويب البيانات فى جداول إحصائية.

المرحلة الثالثة: عرض البيانات فى أشكال ورسوم بيانية.

المرحلة الرابعة: القياس لتلخيص وتفسير البيانات وتحديد العلاقات بينها.

المرحلة الخامسة: التحليل والإستنباط واستقراء النتائج والتنبؤ بالمستقبل.

ولدراسة المراحل السابقة لابد من تقسيم علم الإحصاء إلى قسمين:

١- الإحصاء الوصفى:

وهو علم التعامل مع البيانات الأولية لإظهار خصائصها

ويتم من خلال المراحل الأربعة الأولى وهى جمـــع وتبويـــب وعـــرض وقياس البيانات

٢- الإحصاء التحليلى:

وهو علم الإستنباط عن طريق التخطيط والتقدير والتنبؤ بالمستقبل بهدف اتخاذ القرارات الإدارية المختلفة

ويتم ذلك من خلال المرحلة الخامسة من مراحل البحث الإحصائى وهى التحليل والإستنباط.

التطبيق الثالث:

حدد مصادر الحصول على المعلومات والبيانات الإحصائية

الإجابة:

تتلخص مصادر الحصول على البيانات فيما يلى:

أولاً: المصادر التاريخية:(مصادر مباشرة)

وهى عبارة عن مصادر موثقة أو مسجلة أو مكتوبة ومتوفرة عن الظاهرة محل الدراسة وتتمثل فى الكتب والتقارير والإحصاءات المنشورة .... إلخ

وتنقسم المصادر التاريخية إلى:

١- مصادر داخلية:

وبمقتضاها يتم الحصول على البيانات من داخل الوحدة من واقع الدفاتر والسجلات والقوائم المالية.

٢- مصادر خارجية:

وبمقتضاها يتم الحصول على البيانات من خارج الوحدة من خلال ما تنشره الوحدات الأخرى من تقارير.

وتنقسم المصادر الخارجية إلى:

(أ) مصادر أولية (أصلية):

يقوم بإعدادها ونشرها الجهة التى قامت بإعداد وجمع البيانات وتبويبها لأول مرة.

(ب) مصادر ثانوية:

تشمل جميع البيانات والمعلومات المسجلة والتى سبق إعدادها من مصدر أصلى آخر ثم يحصل منها الدارس على ما يحتاجه من معلومات.

ثانياً: المصادر الميدانية: (مصادر غير مباشرة)

وتعنى أن يقوم الدارس بالحصول على المعلومات من الميدان عن طريق تصميم وإعداد قائمة استقصاء ، وتتميز هذه الطريقة أنها توفر للدارس بيانات أكثر دقة من بيانات سبق إعدادها من قبل الغير.

التطبيق الرابع:

حدد قواعد تصميم صحيفة الاستبيان وأنواع الأسئلة التى تتضمنها

الإجابة:

تتمثل قواعد تصميم صحيفة الاستبيان فيما يلى:

١. اختيار أبسط الألفاظ الممكنة عند صياغة.
٢. تحاشى الأسئلة الشخصية المحرجة.

٣. تحاشى الأسئلة الإيحائية التى توحى للمبحوث بإجابة معينة.
٤. تحاشى الأسئلة التى تحتاج لتركيز أو تعتمد على الذاكرة البعيدة.
٥. تحاشى الأسئلة التى تتطلب إجراء عمليات حسابية معقدة.
٦. يفضل أن تكون الأجوبة المتوقعة للأسئلة قصيرة ومختصرة.
٧. يجب تحاشى الأسئلة ذات الإجابات الوصفية والتركيز على الأسئلة ذات الإجابات الكمية.
٨. شرح وتفسير المصطلحات المستخدمة.
٩. مراعاة وضع أسئلة إضافية للمراجعة.
١٠. يراعى ترك فراغاً فى الاستمارة للمبحوث لإبداء أى آراء.
١١. مراعاة المستوى التعليمى للمبحوثين عند صياغة الأسئلة.
١٢. عدم وضع أسئلة تكون إجاباتها مدونة فى سجلات أو تقارير أو أى مصدر تاريخى.

أنواع الأسئلة التى تتضمنها صحيفة الاستبيان:

(أ) الأسئلة ذات الاجابات الثنائية:

عادة ما يتم الإجابة على هذه الأسئلة بنعم أو لا وهى أسهل أنواع الأسئلة بالنسبة للمبحوث.

(ب) الأسئلة ذات الاجابات المتعددة:

وغالباً ما يزيد فيها عدد الإجابات عن أثنين وعادة ما يضع المبحوث علامة (√) أمام الإجابة المناسبة وهى أيضاً سهلة بالنسبة للمبحوث.

(ج) الأسئلة المفتوحة (الوصفية):

وهى أصعب أنواع الأسئلة عند استيفائها من المبحوث وعند تفريغها وتحليلها من جانب الدارس.

(د) الأسئلة محددة المعلومات:

مثل كم عمرك – كم وزنك – عدد الأولاد – عدد غرف المنزل – الحالة الاجتماعية

التطبيق الخامس:

تكلم عن طرق جمع البيانات الميدانية

الإجابة:

تتمثل طرق جمع البيانات الميدانية فيما يلى:

١- المقابلة الشخصية:

يتم مقابلة المبحوث شخصياً لاستيفاء المعلومات منه وتدوينها مباشرة فى قائمة الاستقصاء

مميزات هذه الطريقة	عيوب هذه الطريقة
- توجيه الأسئلة مباشرة للمبحوث ومن ثم تفسير أى مصطلحات - تسجيل أية ملاحظات عن ردود الأفعال - استيفاء قوائم الاستقصاء بالكامل - تناسب الأشخاص الأميين	- تحتاج إلى وقت كبير وتكلفة عالية - قد تحتوى على بعض التحيز والإيحاء - قد تسبب نوعاً من الإحراج فى بعض الأسئلة

٢- المراسلة (البريد):

وبمقتضاها يتم إرسال قوائم الاستقصاء للمبحوثين عن طريق البريد

مميزات هذه الطريقة	عيوب هذه الطريقة
- تغطية مساحات جغرافية واسعة - عدم الحرج فى كتابة الإجابات - عدم التحيز والإيحاء من جانب جامع البيانات - غير مكلفة فى الوقت والمال مقارنة بالمقابلة الشخصية	- ضعف نسبة ردود المبحوثين - صعوبة الرد على بعض الأسئلة الغامضة التى تحتاج إلى تفسير - كما تشترط هذه الوسيلة إجادة المبحوثين القراءة والكتابة (لا تناسب الأشخاص الأميين)

٣- التليفون والأنترنت:

مميزات هذه الطريقة	عيوب هذه الطريقة
- تغطية مساحات جغرافية واسعة - إمكانية توضيح أى غموض فى الأسئلة	- تخلو من مزايا الاتصال المباشر - تقتصر على فئة خاصة من المجتمع وهم أصحاب التليفونات فقط

٤- المشاهدة والملاحظة والتجربة:

تعتمد على التجربة والملاحظة وجمع وتسجيل النتائج الخاصة بظاهرة معينة عن طريق مشاهدتها وملاحظتها.

التطبيق السادس:

حدد مع التقييم أساليب جمع البيانات

الإجابة:

يتم جمع البيانات باستخدام اسلوبين هما:

- اسلوب الحصر الشامل
- اسلوب العينات

(١) اسلوب الحصر الشامل

يعنى أن الدراسة تشمل كل مفردات المجتمع الإحصائى ويقصد بالمجتمع الإحصائى جميع المفردات التى يجمعها إطار عام واحد أو تتفق فى مجموعة خصائص عامة واحدة.

ويوجد نوعان من المجتمع الإحصائى:

المجتمع المحدود:

وهذا المجتمع يمكن حصره أو عده ويتم تحديده بوضع تعريف دقيق لإطار المجتمع

المجتمع غير المحدود:

وهذه المجتمعات لا يمكن حصرها أو عدها ولكن يمكن وضع خصائص وصفات مميزة لها

تقييم أسلوب الحصر الشامل:

مزايا أسلوب الحصر الشامل	عيوب أسلوب الحصر الشامل
- لا نحتاج لتعميم النتائج عند دراسة العينات - يعتبر الأكثر ملائمة فى بعض الدراسات مثل التعداد العام للسكان. - يعتبر ضرورى لبعض الحالات التى لابد من دراستها بالكامل مثل التطعيم ضد بعض الأمراض.	كلما كان المجتمع الإحصائى كبيرٍ جداً كلما تطلب وقتاً طويلاً ومجهوداً كبيراً ونفقات باهظة.

(٢) أسلوب العينات:

العينة عبارة عن جزء محدود من المجتمع يتم اختيارها بطريقة عشوائية.

الاختيار العشوائى: هو الاختيار الذى يحقق تكافؤ الفرص لجميع مفردات المجتمع ويتحقق بأحد الوسائل التالية:

أ. طريقة البطاقات أو الكروت.

ب. استخدام الحاسبات الآلية فى استخراج العينة عشوائياً.

ج. جداول الأرقام العشوائية.

تقييم اسلوب العينات:

مزايا اسلوب العينات	عيوب اسلوب العينات
- توفير الوقت والجهد. - ضرورى فى حالة إذا كانت مفردات المجتمع من النوع الذى يتلاشى بتجربته. - إذا كان المجتمع غير محدود - التعمق فى الدراسة بدلاً من السطحية عند دراسة المجتمع	لا توفر للباحث الدقة الكاملة لأنها تقوم على مجموعة معينة من مفردات المجتمع وتتوقف نتائج الدراسة على مدى تمثيل العينة للمجتمع ومدى عشوائيتها.

التطبيق السابع:

تكلم عن أنواع العينات ومجالات استخدام كل منها موضحاً المزايا والعيوب

الإجابة:

أنواع العينات:

١- العينة العشوائية البسيطة

٢- العينة العشوائية المنتظمة

٣- العينة العشوائية الطبقية

٤- العينة العشوائية متعددة المراحل

(١) العينة العشوائية البسيطة:

تعريفها	يتم بمقتضاها ترتيب مفردات المجتمع وترقيمها داخل إطار معين ثم تسحب العينة عشوائياً بعد تحديد حجمها
مجالات استخدامها	تستخدم فى حالة ما إذا كان حجم المجتمع محدود ومتجانس بمعنى أن تكون وحدات المجتمع متشابهة فى الخصائص
المزايا	تمتاز بالبساطة وسهولة الاختيار وقلة التكاليف
العيوب	لا تصلح للمجتمعات الكبيرة حيث تحتاج لوقت ومجهود وتكلفة لا تعبر عن الطبقات المختلفة أو الخصائص المختلفة لمفردات المجتمع وبالتالى لا تسمح بالتحليل الدقيق وتعطى عادة نتائج عامة

(٢) العينة العشوائية المنتظمة:

تعريفها	يتم بمقتضاها ترقيم ثم ترتيب المجتمع ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ثم يقسم المجتمع إلى مجموعات متتالية بحيث يكون عدد المجموعات مساوياً لحجم العينة ويتم اختيار مفردة العينة الأولى من المجموعة الأولى بطريقة العينة العشوائية البسيطة ثم يتم تكرار اختيار نفس ترتيب المفردة الأولى فى باقى المجموعات بانتظام.
مجالات استخدامها	تصلح للمجتمعات كبيرة الحجم ولكن بشرط أن تكون متجانسة
المزايا	تضمن توزيع العينة على المدى الكبير للمجتمع وعدم تركزها فى فئات معينة تمتاز بالسهولة فى الاختيار وقلة الجهد والتكاليف
العيوب	لا تناسب المجموعات غير المتجانسة

(٣) العينة العشوائية الطبقية:

تعريفها	يتم بمقتضاها تقسيم المجتمع إلى مجموعات متجانسة ومتفقة الخصائص أى أن المفردات داخل كل مجموعة تكون متجانسة وبين المجموعات وبعضها البعض تكون متباينة وعادةً ما تكون المجموعات مختلفة الحجم ويتم توزيع العينة على الطبقات المختلفة بأحد الأساليب التالية: أ – التوزيع المتساوى ب – التوزيع النسبى جـ – التوزيع الأمثل
مجالات استخدامها	تصلح للمجتمعات الكبيرة غير المتجانسة أو التى تتنوع الخصائص المميزة لمفرداتها
المزايا	تمثل المجتمع تمثيلاً حقيقياً ودقيقاً وبذلك تساعد على التحليل العميق والوصول لنتائج جيدة.
العيوب	أكثر الطرق تعقيداً وتكلفة

(٤) العينة العشوائية متعددة المراحل:

تعريفها	بمقتضاها يتم اختيار العينة على عدة خطوات أو مراحل متتابعة وفى كل مرحلة نختار العينة إما بطريقة العينة العشوائية البسيطة أو بطريقة العينة العشوائية المنتظمة أو بطريقة العينة العشوائية الطبقية.

التطبيق الثامن:

تكلم عن طرق أنواع الأخطاء فى البيانات

الإجابة:

يوجد نوعان من الأخطاء فى البيانات:

- خطأ التحيز
- خطأ الصدفة

خطأ التحيز (الأخطاء المنتظمة)	خطأ الصدفة (الأخطاء العشوائية)
• أخطاء مرفوضة • توجد عند دراسة العينة أو المجتمع وتظهر بصورة أكبر عند دراسة المجتمع • عادةً ما تكون مقصودة • عادةً ما تكون فى اتجاه واحد إما موجبة أو سالبة تنشأ من المصادر التالية: - الإهمال من جانب الباحث - البيانات الخاطئة من المصادر التاريخية أو الميدانية - الاختيار غير العشوائى لمفردات العينة أى عدم تكافؤ الفرص لمفردات المجتمع - استخدام مقاييس إحصائية غير مناسبة	• أخطاء مقبولة • توجد عند دراسة العينات فقط • لا دخل للباحث فى وجودها (غير مقصودة) • هذه الأخطاء تكون موجبة أو سالبة ومجموع انحرافات هذه الأخطاء الموجبة والسالبة = صفر • الأخطاء الصغيرة هى الأكثر شيوعاً من الأخطاء الكبيرة ما لم يكن هناك قيم شاذة فى مفردات المجتمع • يتناسب الخطأ العشوائى (الصدفة) تناسب عكسى مع حجم العينة

التطبيق التاسع:

فيما يلى عينة عشوائية من درجات ٦٠ طالب فى مادة الرياضة البحتة لطلبة كلية التجارة جامعة القاهرة مجموعة (ب) عن العام الدراسى ٢٠١٤/٢٠١٥:

١٥ ١٤ ١٠ ١٢ ٦ ٢٠ ١٩ ١٦ ١٣ ١٢ ١٠ ١٥

٣ ١٨ ١٦ ١٠ ١١ ١٢ ١٤ ١٥ ٦ ٢ ١٣ ٤

١٤ ١٠ ١١ ٨ ٢ ١ ٠ ١٣ ١٧ ١٨ ٢ ١٠

١٣ ١١ ١٧ ١٦ ١٥ ١٩ ٢٠ ٤ ١٣ ١٢ ١٠ ١٥

٦ ٧ ١٦ ١٥ ١٤ ١٣ ١٢ ١٥ ٥ ١٢ ١٤ ١٧

المطلوب: توزيع الطلبة فى ٥ فئات غير متصلة وتكوين جدول توزيع تكرارى بسيط

الحل:

ملاحظات قبل الحل:

لإعداد جدول تكرارى على أساس الفئات للبيانات السابقة يراعى ما يلى:

- يحدد المدى وهو الفرق بين أقل قيمة وأكبر قيمة وفى مثالنا يتبين أن أقل قيمة هى صفر وأكبر قيمة ٢٠

  ∴ المدى = ٢٠ – صفر = ٢٠

- تحديد عدد الفئات التى سوف تظهر فى الجدول وهة محدودة فى هذا التمرين بخمس فئات
- تحديد طول الفئة ويتحدد على أساس المدى مقسوماً على عدد الفئات

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$$

جدول تفريغ البيانات

الفئات	تفريغ العينة	التكرار
٠ – ٤	𝍸 𝍷𝍷𝍷	٨
٥ – ٩	𝍸 𝍷	٦
١٠ – ١٤	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍷	٢٦
١٥ – ١٩	𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷	١٨
٢٠ – ٢٤	𝍷𝍷	٢
	المجموع	٦٠

وإذا رمزنا للفئات بالرمز (ف) والتكرار بالرمز (ك) يمكن استنتاج جدول التوزيع التكرارى كما يلى :

جدول التوزيع التكرارى للبيانات

ف	ك
٠ – ٤	٨
٥ – ٩	٦
١٠ – ١٤	٢٦
١٥ – ١٩	١٨
٢٠ – ٢٤	٢
مجــ ك	٦٠

التطبيق العاشر:

فيما يلى عينة عشوائية من أجور عمال مصنع وعدد الوحدات المنتجة فى اسبوع إذا كان حجم العينة ٥٠ عامل:

العامل	الأجر	عدد الوحدات	العامل	الطول	عدد الوحدات
١	٢٠	١٥	٢٦	٣٢	١٦
٢	٢٥	١٨	٢٧	٤٣	١٥
٣	٤٠	١٦	٢٨	٤٧	٢٣
٤	٣٥	١٧	٢٩	٣٤	٣٢
٥	٢٧	١٢	٣٠	٢٤	١٧
٦	١٥	٢٠	٣١	١٥	١٤
٧	١٢	١٥	٣٢	١٨	١٣
٨	٢٤	١٦	٣٣	١٧	٢١
٩	٤٥	٢٠	٣٤	٣٥	١٢
١٠	٣٢	١٠	٣٥	٤٤	١٥
١١	٣٦	١٤	٣٦	٥٢	٣٤
١٢	٢٤	١٧	٣٧	٢٦	١٦
١٣	٣٤	٢٥	٣٨	٣١	١٤
١٤	٤٦	١٤	٣٩	٣٩	١٣
١٥	٣٥	١٨	٤٠	٢٥	٢٣
١٦	١٧	٢٥	٤١	٢٨	٢٥
١٧	٥٣	٢٧	٤٢	٢٦	١٤
١٨	٤٨	١٢	٤٣	١٤	١٠
١٩	٥٠	٢٣	٤٤	١٨	١٥
٢٠	٢٥	١٤	٤٥	٢٦	٢٢
٢١	٣٥	١٦	٤٦	٤٦	٢٥
٢٢	١٥	١٠	٤٧	٤٧	٢٧
٢٣	١٧	١٣	٤٨	٥٠	٢٩
٢٤	٣٦	٢٥	٤٩	٤٨	٣٠
٢٥	٣٠	٢٨	٥٠	٢٦	٣٥

المطلوب: فرغ العينة السابقة فى جدول توزيع تكرارى مزدوج فى شكل فئات متساوية متصلة

الحل:

جدول تفريغ بيانات لمتغيرين

فئات الأجر / فئات الوحدات	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-٥٥
١٠-	|	||||	–	|||	||	|||	–	||	–
١٥-	|	|	||||	||	|	|||	|||	–	–
٢٠-	–	||	–	||	–		–	||	|
٢٥-	–	|	–	|	||	|	–	||	||
٣٠-	–		–	–	|		–	|	|
٣٥-٤٠	–		–	|	–		–	–	–

وإذا رمزنا لفئات الأجر بالرمز (س) ومجموع تكرارات فئات الأجر بالرمز ($ك_{س}$)

وإذا رمزنا لفئات الوحدات المنتجة بالرمز (ص) ومجموع تكرارات فئات الوحدات المنتجة بالرمز ($ك_{ص}$)

فإنه يمكن إعداد جدول توزيع تكرارى للمتغيرين كما يلى :

جدول التوزيع التكرارى للمتغيرين (الجدول المزدوج)

س / ص	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-٥٥	$ك_{ص}$
١٠-	١	٤	–	٣	٢	٣	–	٢	–	١٥
١٥-	١	١	٤	٢	١	٣	٣	–	–	١٥
٢٠-	–	٢	–	٢	–	–	–	٢	١	٧
٢٥-	–	١	–	١	٢	١	–	٢	٢	٩
٣٠-	–	–	–	–	١	–	–	١	١	٣
٣٥-٤٠	–	–	–	١	–	–	–	–	–	١
$ك_{س}$	٢	٨	٤	٩	٦	٧	٣	٧	٤	٥٠

التطبيق الحادى عشر:

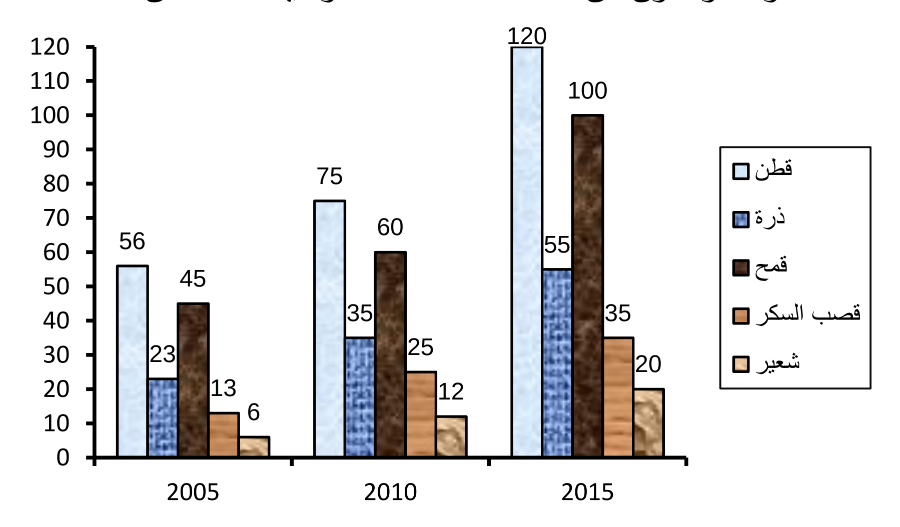
السنة / الغلة	٢٠٠٥	٢٠١٠	٢٠١٥
قطن	٥٦	٧٥	١٢٠
ذرة	٢٣	٣٥	٥٥
قمح	٤٥	٦٠	١٠٠
قصب السكر	١٣	٢٥	٣٥
شعير	٦	١٢	٢٠

المطلوب: (١) اعرض الجدول السابق فى شكل أعمدة مناسبة

(٢) اعرض الانتاج عام ٢٠١٥ فى شكل دائرة

الحل:

(١) يمكن عرض الجدول السابق فى شكل أعمدة متلاصقة تتكون من ثلاثة مجموعات من الأعمدة المتلاصقة كل مجموعة تمثل سنة من السنوات وتتكون من خمسة أعمدة كل عمود يمثل غلة من الغلال.



(٢) عرض انتاج عام ٢٠١٥ فى شكل دائرة

يتم توزيع درجات الدائرة على القيم النسبية للغلال كما يلى:

الدرجة التى تقابل المتغير = $\frac{\text{قيمة المتغير}}{\text{مجموع القيم}}$ X ٣٦٠°

الدرجة التى تقابل القطن = $\frac{١٢٠}{٣٣٠}$ X ٣٦٠° = ١٣١°

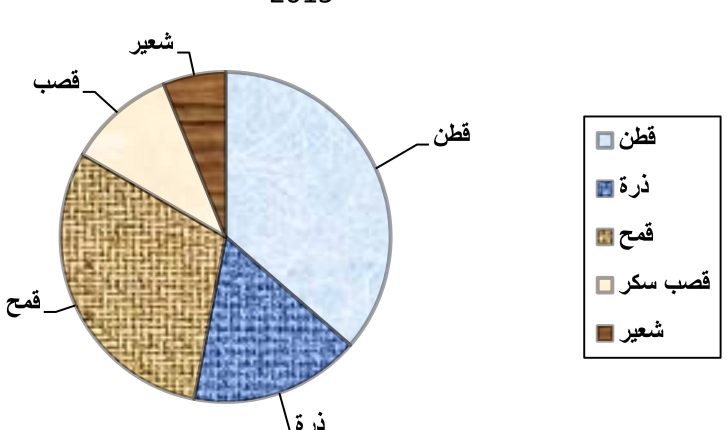
الدرجة التى تقابل الذرة = $\frac{٥٥}{٣٣٠}$ X ٣٦٠° = ٦٠°

الدرجة التى تقابل القمح = $\frac{١٠٠}{٣٣٠}$ X ٣٦٠° = ١٠٩°

الدرجة التى تقابل قصب السكر = $\frac{٣٥}{٣٣٠}$ X ٣٦٠° = ٣٨°

الدرجة التى تقابل الشعير = $\frac{٢٠}{٣٣٠}$ X ٣٦٠° = ٢٢°

٣٦٠°



التطبيق الثانى عشر:

فئات الأجر	٨٠-	١٠٠-	١٣٠-	١٤٠-	١٧٥-	٢٠٠-٢٥٠
عدد العاملين	١٠٠	٢٤٠	١٢٠	٣٥٠	١٧٥	١٥٠

المطلوب:

١) ارسم المدرج التكرارى واستنتج المنحنى التكرارى منه

٢) ارسم المنحنى المتجمع الصاعد واستنتج منه الأجر الذى يحصل على أقل منه ٣٠٪ من عدد العاملين

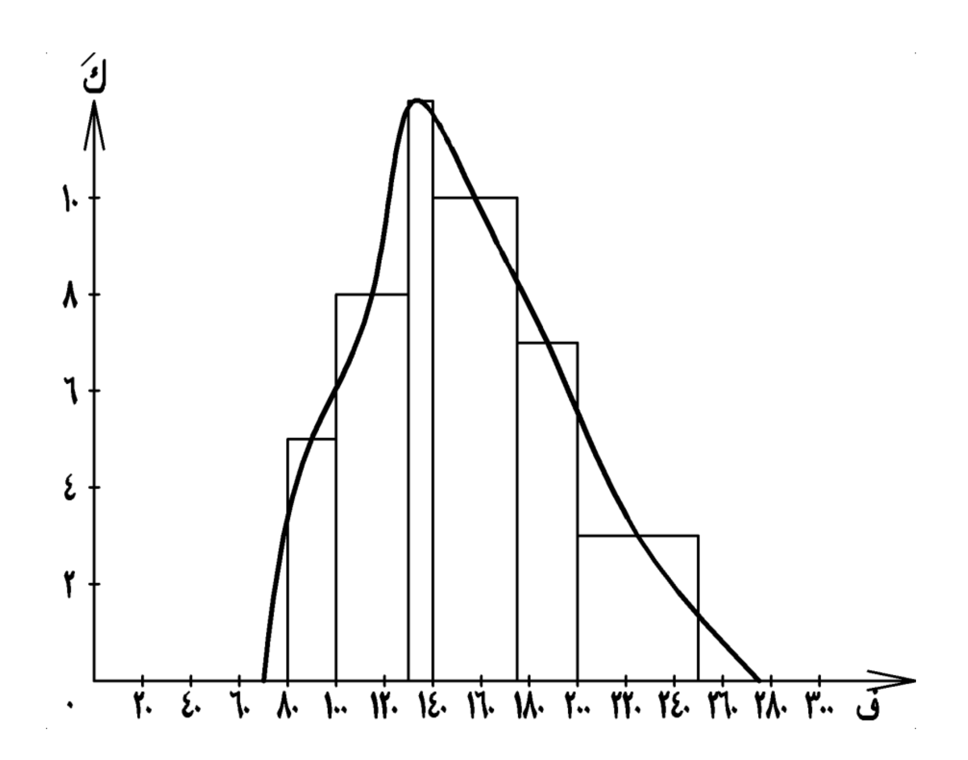
٣) ارسم المنحنى المتجمع الهابط واستنتج منه عدد العاملين الذين تتراوح أجورهم بين ١٢٠ ، ١٥٠

الحل:

(١) رسم المدرج التكرارى واستنتاج المنحنى التكرارى منه

الفئات ف	التكرارات ك	طول الفئة ط	التكرار المعدل كَ
٨٠-	١٠٠	٢٠	٥
١٠٠-	٢٤٠	٣٠	٨
١٣٠-	١٢٠	١٠	١٢
١٤٠-	٣٥٠	٣٥	١٠
١٧٥-	١٧٥	٢٥	٧
٢٠٠-٢٥٠	١٥٠	٥٠	٣

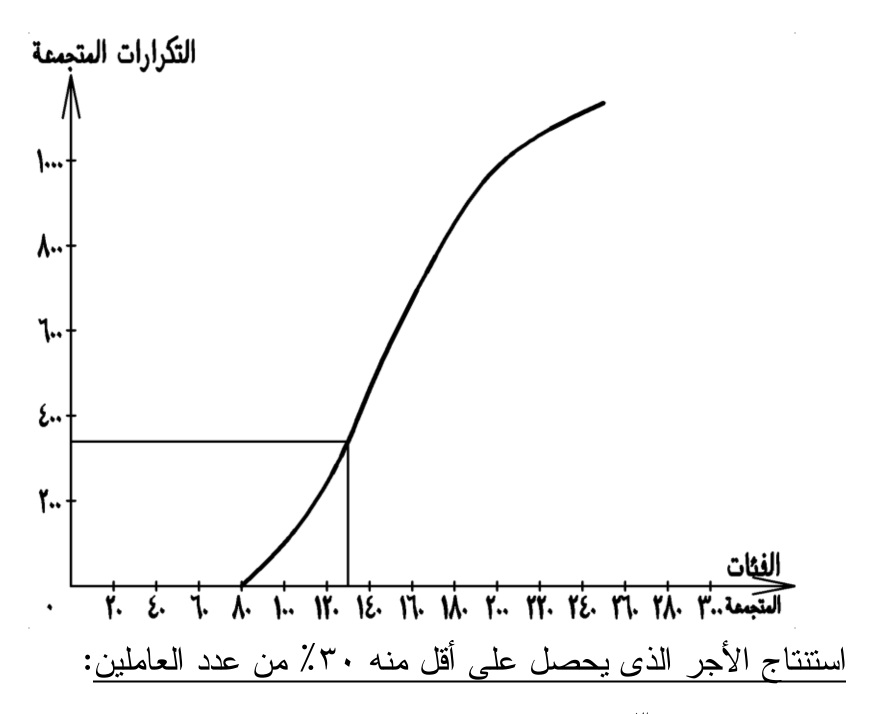
حيث $كَ = \frac{ك}{ط}$



(٢) رسم المنحنى المتجمع الصاعد واستنتاج الأجر الذى يحصل على أقل منه ٣٠٪ من عدد العاملين

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

ف	ك	الحدود العليا للفئات	التكرارات المتجمعة الصاعدة
٨٠–	١٠٠	أقل من ٨٠	صفر
١٠٠–	٢٤٠	أقل من ١٠٠	١٠٠
١٣٠–	١٢٠	أقل من ١٣٠	٣٤٠
١٤٠–	٣٥٠	أقل من ١٤٠	٤٦٠
١٧٥–	١٧٥	أقل من ١٧٥	٨١٠
٢٠٠–٢٥٠	١٥٠	أقل من ٢٠٠	٩٨٥
		٢٥٠ فأقل	١١٣٥
	١١٣٥ مجـ ك		



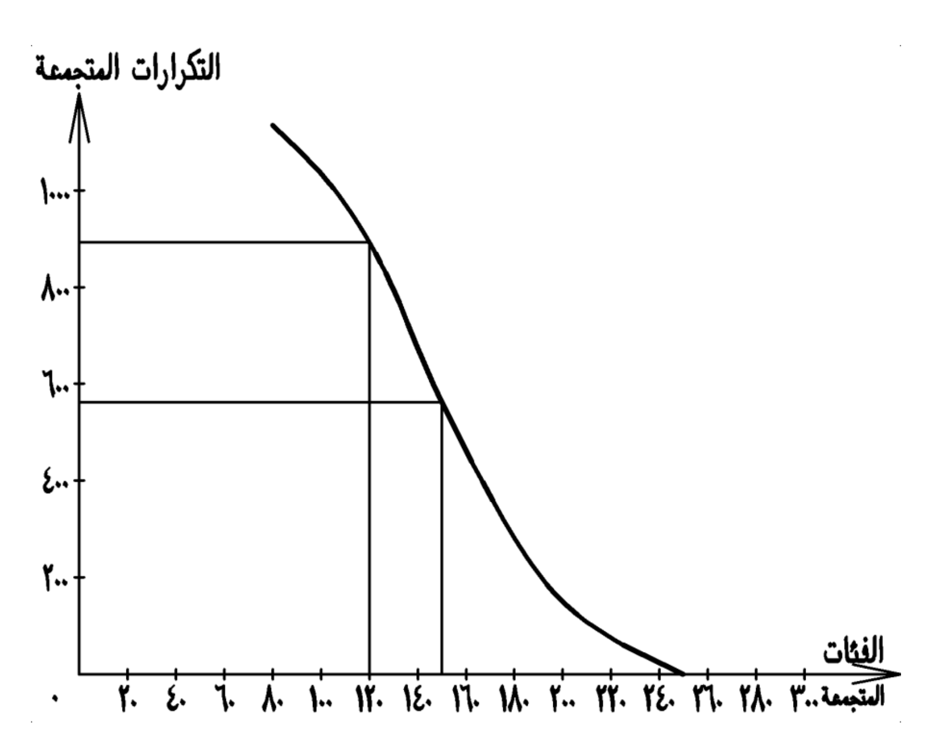
<u>استنتاج الأجر الذى يحصل على أقل منه ٣٠٪ من عدد العاملين:</u>

عدد العمال = $\frac{٣٠}{١٠٠}$ x ١١٣٥ = ٣٤٠ عامل

ونلاحظ من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد أن الأجر الذى يحصل على أقل منه ٣٤٠ عامل هو ١٣٠ جنيه تقريباً

<u>(٣) رسم المنحنى المتجمع الهابط واستنتاج عدد العاملين الذين تتراوح أجورهم بين ١٢٠ ، ١٥٠</u>

الحدود الدنيا للفئات	التكرارات الهابطة
٨٠ فأكثر	١١٣٥
١٠٠ فأكثر	١٠٣٥
١٣٠ فأكثر	٧٩٥
١٤٠ فأكثر	٦٧٥
١٧٥ فأكثر	٣٢٥
٢٠٠ فأكثر	١٥٠
أكثر من ٢٥٠	صفر



نقيم عمودين عند فئات الأجرين ١٢٠ ، ١٥٠ جنيه ومن نقط تقاطعهما مع المنحنى المتجمع الصاعد نرسم خطين موازيين للمحور الأفقى فيتحدد عدد العمال بالفرق بين القراءتين المحددتين على المحور الرأسى.

عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ١٥٠ جنيه = ٥٦٣ عامل

عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ١٢٠ جنيه = ٨٩٤ عامل

عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ١٢٠جنيه ، ١٥٠ جنيه =

٨٩٤ – ٥٦٣ = ٣٣١ عامل

تطبيقات على الباب الثانى

مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات)

التطبيق الأول:

فئات الوزن	٥٠-	٦٠-	٦٥-	٨٠-	٩٠-١١٠
عدد الطلبة	٣٠٠	٣٥٠	٧٥٠	٢٠٠	١٠٠

المطلوب:

١. حساب متوسط الوزن

٢. حساب وسيط الوزن بالحساب وبالرسم

٣. حساب القيمة الشائعة (المنوال) للوزن بطريقة الرافعة وبالرسم

الحل:

حساب متوسط الوزن:

الفئات ف	مراكز الفئات س	التكرارات ك	التكرارات × مراكز الفئات ك × س
٥٠-	٥٥	٣٠٠	١٦٥٠٠
٦٠-	٦٢,٥	٣٥٠	٢١٨٧٥
٦٥-	٧٢,٥	٧٥٠	٥٤٣٧٥
٨٠-	٨٥	٢٠٠	١٧٠٠٠
٩٠-١١٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠٠٠
		١٧٠٠ مجـــ ك	١١٩٧٥٠ مجـــ ك س

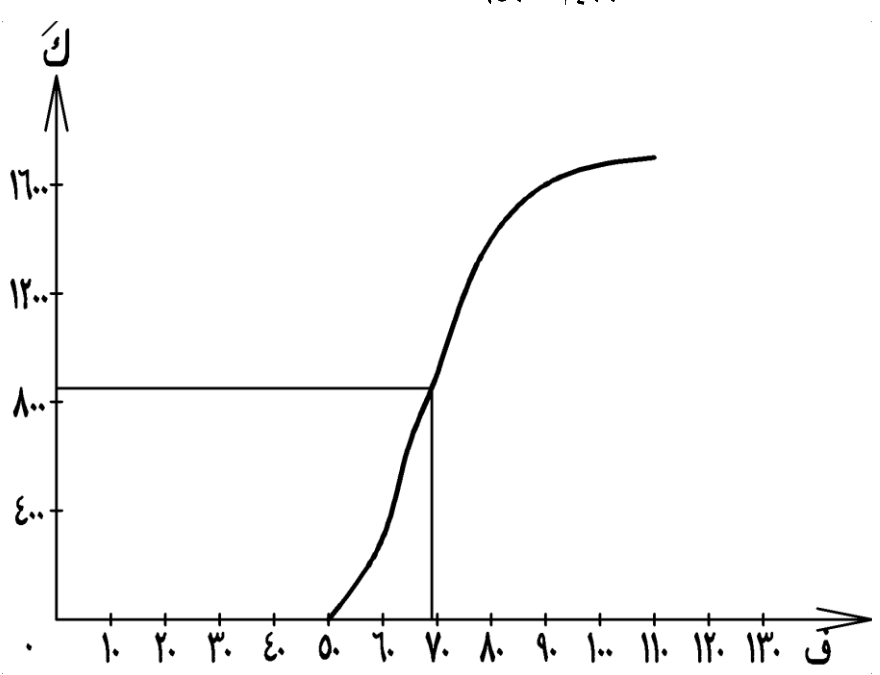
$$\overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـــ ك س}}{\text{مجـــ ك}} = \frac{١١٩٧٥٠}{١٧٠٠} = ٧٠,٤٤$$

حساب وسيط الوزن بالحساب وبالرسم:

الحدود العليا للفئات	التكرارات الصاعدة
أقل من ٥٠	صفر
أقل من ٦٠	٣٠٠
أقل من ٦٥	٦٥٠
أقل من ٨٠	١٤٠٠
أقل من ٩٠	١٦٠٠
١١٠ فأقل	١٧٠٠

ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجـك}}{٢}$ = $\frac{١٧٠٠}{٢}$ = ٨٥٠

$ر_٢$ = ٦٥ + ١٥ × $\frac{٨٥٠ - ٦٥٠}{١٤٠٠ - ٦٥٠}$ = ٦٩ ∴ الوسيط = ٦٩

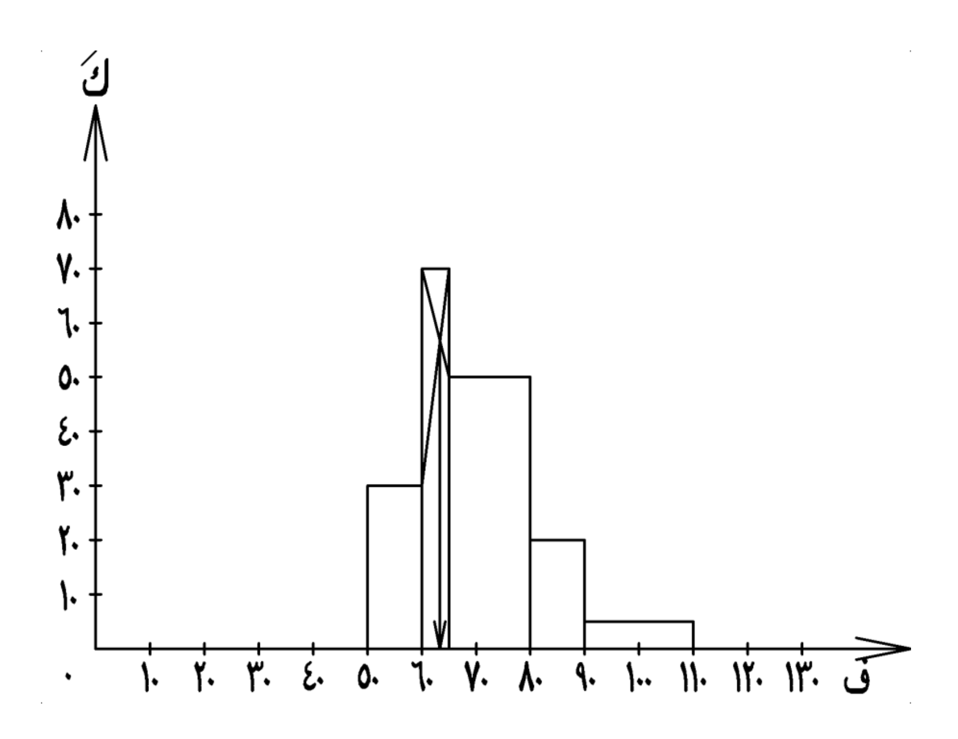


حساب القيمة الشائعة (المنوال) للوزن بطريقة الرافعة وبالرسم:

ف	ك	ط	ك ÷ ط
٥٠-	٣٠٠	١٠	٣٠ ⟵ $ك_{م-١}$
٦٠-	٣٥٠	٥	٧٠ ⟵ $ك_{م}$
٦٥-	٧٥٠	١٥	٥٠ ⟵ $ك_{م+١}$
٨٠-	٢٠٠	١٠	٢٠
٩٠-١١٠	١٠٠	٢٠	٥

المنوال بطريقة الرافعة = بداية الفئة المنوالية + $ط_{م} \times \frac{ك_{م+١}}{ك_{م+١} + ك_{م-١}}$

$$= ٦٠ + ٥ \times \frac{٥٠}{٥٠ + ٣٠} = ٦٣,١٢٥$$



التطبيق الثانى:

الفئات	صفر-	٦-	١٠-	١٨-	٢٥-	٣٠-٤٠
التكرارات	٦٠	٨٠	٣٢٠	١٠٥	٥٠	٢٠

المطلوب:

أ - ارسم المنحنيين الصاعد والهابط معاً واستنتج منهما قيمة الوسيط

ب- ارسم المدرج التكرارى واستنتج المنوال منه

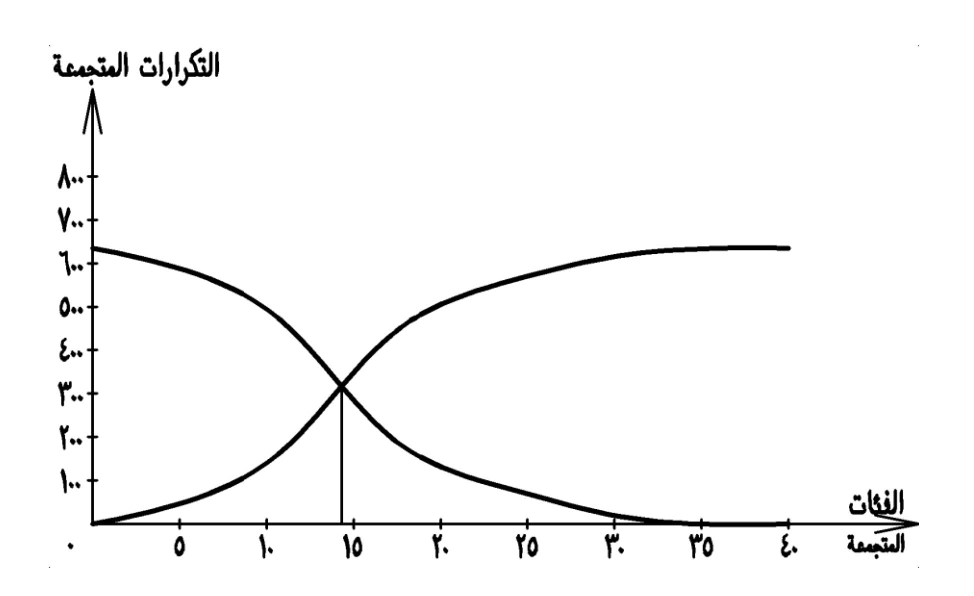
ج- استنتج الوسط الحسابى من المقياسيين السابقين

الحل:

أ- رسم المنحنيين الصاعد والهابط معاً واستنتج منهما قيمة الوسيط

الجدول الصاعد	
الحدود العليا للفئات	التكرارات الصاعدة
أقل من ٦	٦٠
أقل من ١٠	١٤٠
أقل من ١٨	٤٦٠
أقل من ٢٥	٥٦٥
أقل من ٣٠	٦١٥
٤٠ فأقل	٦٣٥

الجدول الهابط	
الحدود الدنيا للفئات	التكرارات الهابطة
صفر فأكثر	٦٣٥
٦ فأكثر	٥٧٥
١٠ فأكثر	٤٩٥
١٨ فأكثر	١٧٥
٢٥ فأكثر	٧٠
٣٠ فأكثر	٢٠
أكثر من ٤٠	صفر

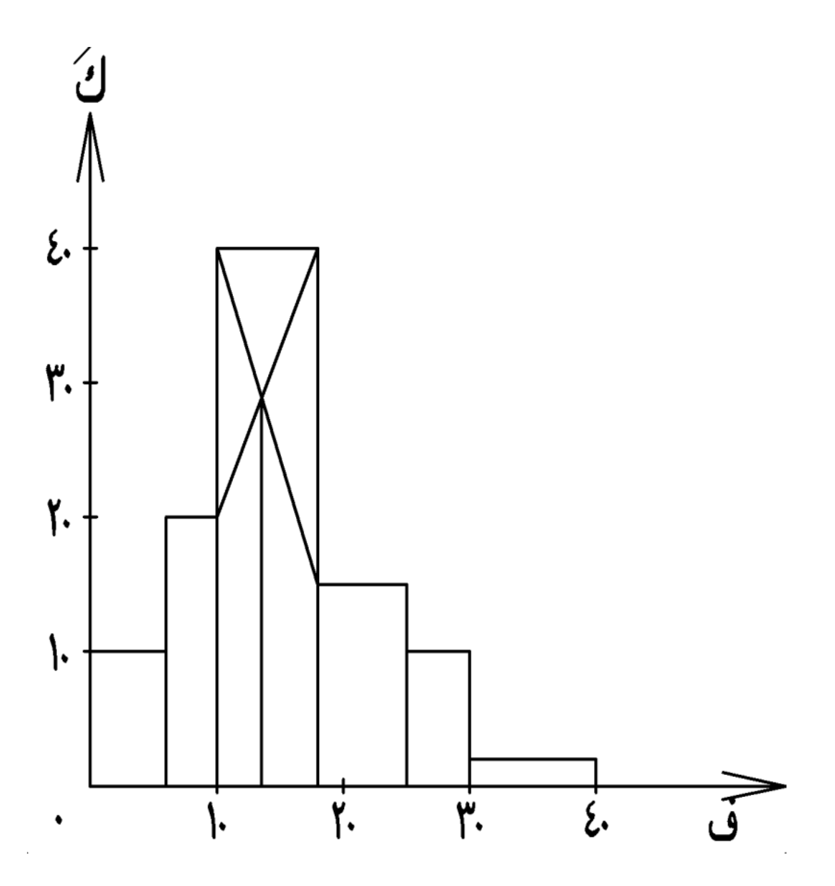


الوسيط = ١٤ تقريباً

<u>ب- رسم المدرج التكرارى واستنتاج المنوال منه</u>

لابد من تعديل التكرارات

ف	ك	ط	ك ÷ ط
٠-	٦٠	٦	١٠
٦-	٨٠	٤	٢٠ ⟵ $ك_{م-١}$
١٠-	٣٢٠	٨	٤٠ ⟵ $ك_{م}$
١٨-	١٠٥	٧	١٥ ⟵ $ك_{م+١}$
٢٥-	٥٠	٥	١٠
٣٠-٤٠	٢٠	١٠	٢



المنوال = ١٣,٦

الوسط الحسابى – المنوال = ٣ (الوسط الحسابى – الوسيط)

$\overline{س}$ – م =٣ ($\overline{س}$ – ر$_{٢}$)

$\overline{س}$ – ١٣,٦ = ٣ ($\overline{س}$ – ١٤)

$\overline{س}$ – ١٣,٦ = ٣ $\overline{س}$ – ٤٢

$\overline{س}$ – ٣ $\overline{س}$ = – ٤٢ + ١٣,٦

– ٢ $\overline{س}$ = – ٢٨,٤

∴ $\overline{س}$ = ١٤,٢

تطبيقات على الباب الثالث

مقاييس التشتت

التطبيق الأول:

فئات الدخل	أقل من ٥٠	٥٠-	١٠٠-	١٨٠-	٢٥٠-	٣٠٠ فأكثر
عدد العاملين	١٥	٢٥	٣٥	٣٠	١٠	٥

المطلوب:

١. حساب مقياس تشتت مطلق ونسبى مناسب للتوزيع السابق

٢. قياس مدى إلتواء توزيع الدخل

الحل:

المطلوب الأول: حساب مقياس تشتت مطلق ونسبى مناسب

جدول متجمع صاعد

ف	ك	الحدود العليا للفئات	التكرارات المتجمعة الصاعدة
أقل من ٥٠	١٥	أقل من ٥٠	١٥
٥٠-	٢٥	أقل من ١٠٠	٤٠
١٠٠-	٣٥	أقل من ١٨٠	٧٥
١٨٠-	٣٠	أقل من ٢٥٠	١٠٥
٢٥٠-	١٠	أقل من ٣٠٠	١١٥
٣٠٠ فأكثر	٥	أقل من الحد الأعلى للفئة الأخيرة	١٢٠

ترتيب الربيع الأدنى $ر_١ = \frac{مجـك}{٤} = \frac{١٢٠}{٤} = ٣٠$

ترتيب الوسيط ر٢ = $\frac{\text{مجـ ك}}{\text{٢}} = \frac{\text{١٢٠}}{\text{٢}} = \text{٦٠}$

ترتيب الربيع الأعلى ر٣ = $\frac{\text{٣ مجـ ك}}{\text{٤}} = \frac{\text{٣×١٢٠}}{\text{٤}} = \text{٩٠}$

ر١ = الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى + طول فئة الربيع الأدنى × $\frac{\text{ترتيب الربيع الأدنى – تكرار الحد الأدنى}}{\text{تكرار الحد الأعلى – تكرار الحد الأدنى}}$

ر١ = $\text{٥٠} + \text{٥٠} \times \frac{\text{٣٠} - \text{١٥}}{\text{٤٠} - \text{١٥}} = \text{٨٠}$

ر٢ = الحد الأدنى للفئة الوسيطية + طول الفئة الوسيطية × $\frac{\text{ترتيب الوسيط – تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيط}}{\text{تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية –تكرار الحد الأدنى للفئة}}$

ر٢ = $\text{١٠٠} + \text{٨٠} \times \frac{\text{٦٠} - \text{٤٠}}{\text{٧٥} - \text{٤٠}} = \text{١٤٥}$

ر٣ = الحد الأدنى لفئة الربيع الأعلى + طول فئة الربيع الأعلى × $\frac{\text{ترتيب الربيع الأعلى – تكرار الحد الأدنى}}{\text{تكرار الحد الأعلى – تكرار الحد الأدنى}}$

ر٣ = $\text{١٨٠} + \text{٧٠} \times \frac{\text{٩٠} - \text{٧٥}}{\text{١٠٥} - \text{٧٥}} = \text{٢١٥}$

<u>مقياس تشتت مطلق (نصف المدى الربيعى)</u>

نصف المدى الربيعى = $\frac{\text{ر٣} - \text{ر١}}{\text{٢}}$

$= \frac{\text{٢١٥} - \text{٨٠}}{\text{٢}} = \text{٦٧,٥}$

مقياس تشتت نسبى (معامل اختلاف ربيعى)

$$خ_ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١} \times ١٠٠$$

$$خ_ر = \frac{٢١٥ - ٨٠}{٢٥١ + ٨٠} \times ١٠٠ = ٤٥,٧٪$$

المطلوب الثانى: قياس مدى إلتواء توزيع الدخل

$$مقياس\ الالتواء\ ت_ر = \frac{(ر_٣ - ر_٢) - (ر_٢ - ر_١)}{(ر_٣ - ر_١)}$$

$$= \frac{(٢١٥ - ١٤٥) - (١٤٥ - ٨٠)}{(٢١٥ - ٨٠)}$$

$$= \frac{٥}{١٣٥} = ٠,٠٣$$ إلتواء موجب جهة اليمين

التطبيق الثانى:

فئات الأجر	٨٠–	١٠٠–	١٥٠–	٢٠٠–	٢٥٠–	٢٨٠–	٣٥٠–٥٠٠
عمال مصنع (أ)	٢٠	٤٥	٨٥	٦٥	٣٠	٢٠	١٠
عمال مصنع (ب)	٣٠	٣٥	٧٥	٤٥	٣٥	١٥	٥

المطلوب:

أ – قارن بين تشتت الأجر فى المصنعين.

ب– قارن بين إلتواء التوزيعين.

الحل:

أولاً: حساب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى والمنوال لعمال المصنع أ

ف	ك	س	ح = س - أ	ك ح	ك $ح^2$
-٨٠	٢٠	٩٠	-٨٥	-١٧٠٠	١٤٤٥٥٠
-١٠٠	٤٥	١٢٥	-٥٠	-٢٢٥٠	١١٢٥٠٠
-١٥٠	٨٥	١٧٥	صفر	صفر	صفر
-٢٠٠	٦٥	٢٢٥	٥٠	٣٢٥٠	١٦٢٥٠٠
-٢٥٠	٣٠	٢٦٥	٩٠	٢٧٠٠	٢٤٣٠٠٠
-٢٨٠	٢٠	٣١٥	١٤٠	٢٨٠٠	٣٩٢٠٠٠
٣٥٠-٥٠٠	١٥	٤٢٥	٢٥٠	٣٧٥٠	٩٣٧٥٠٠
	٢٨٠ مجـ ك			٨٥٥٠ مجـ ك ح	١٩٩٢٠٠ مجـ ك $ح^2$

حيث أ = ١٧٥

حساب الوسط الحسابى:

$$\bar{س} = \frac{مجـ ك ح}{مجـ ك} + أ = \frac{٨٥٥٠}{٢٨٠} + ١٧٥ = ٢٠٥,٥$$

حساب الانحراف المعيارى:

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ ك ح^2}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك ح}{مجـ ك}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{١٩٩٢٠٠٠}{٢٨٠} - \left(\frac{٨٥٥٠}{٢٨٠}\right)^2} = \sqrt{٧١١٤,٢ - ٩٣٢,٤}$$

∴ ع = ٧٨,٦

حساب المنوال:

جدول التكرارات المعدلة

ف	ك	ط	ك ÷ ط
٨٠-	٢٠	٢٠	١
١٠٠-	٤٥	٥٠	٠,٩ ← $ك_{م-١}$
١٥٠-	٨٥	٥٠	١,٧ ← $ك_{م}$
٢٠٠-	٦٥	٥٠	١,٣ ← $ك_{م+١}$
٢٥٠-	٣٠	٣٠	١
٢٨٠-	٢٠	٧٠	٠,٣
٣٥٠-٥٠٠	١٥	١٥٠	٠,١
	٢٨٠		

المنوال بطريقة الفروق

$$م = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + ط_{م} \times \frac{(ك_{م} - ك_{م-١})}{(ك_{م} - ك_{م-١}) + (ك_{م} - ك_{م+١})}$$

$$= ١٥٠ + ٥٠ \times \frac{(١,٧-٠,٩)}{(١,٧-٠,٩)+(١,٧-١,٣)} = ١٥٠ + ٥٠ \times \frac{٠,٨}{٠,٨+٠,٤}$$

$\therefore$ م = ١٨٣,٣

ثانياً: حساب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى والمنوال لعمال المصنع ب

ف	ك	س	ح = س - أ	ك ح	ك ح^{٢}
٨٠-	٣٠	٩٠	٨٥-	٢٥٥٠-	٢١٦٧٥٠
١٠٠-	٣٥	١٢٥	٥٠-	١٧٥٠-	٨٧٥٠٠
١٥٠-	٧٥	١٧٥	صفر	صفر	صفر
٢٠٠-	٤٥	٢٢٥	٥٠	٢٢٥٠	١١٢٥٠٠
٢٥٠-	٣٥	٢٦٥	٩٠	٣١٥٠	١٨٣٥٠٠
٢٨٠-	١٥	٣١٥	١٤٠	٢١٠٠	٢٩٤٠٠٠
٣٥٠-٥٠٠	٥	٤٢٥	٢٥٠	١٢٥٠	٣١٢٥٠٠
	٢٤٠ مجـ ك			٤٤٥٠ مجـ ك ح	١٣٠٦٧٥٠ مجـ ك ح^{٢}

حيث أ = ١٧٥

حساب الوسط الحسابى:

$$\overline{س} = \frac{مجـ ك ح}{مجـ ك} + أ = \frac{٤٤٥٠}{٢٤٠} + ١٧٥ = ١٩٣,٥$$

حساب الانحراف المعيارى:

$$ع = \sqrt{\frac{مجـ ك ح^{٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك ح}{مجـ ك}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{١٣٠٦٧٥٠}{٢٤٠} - \left(\frac{٤٤٥٠}{٢٤٠}\right)^{٢}} = \sqrt{٥٤٤٤,٧٩ - ٣٤٣,٧٩}$$

$\therefore$ ع = ٧١,٤٢

<u>حساب المنوال:</u>

جدول التكرارات المعدلة

ف	ك	ط	ك ÷ ط
٨٠-	٣٠	٢٠	١,٥ ⟵ $ك_م$
١٠٠-	٣٥	٥٠	٠,٧
١٥٠-	٧٥	٥٠	١,٥ ⟵ $ك_م$
٢٠٠-	٤٥	٥٠	٠,٩
٢٥٠-	٣٥	٣٠	١,١٧
٢٨٠-	١٥	٧٠	٠,٢١
٣٥٠-٥٠٠	٥	١٥٠	٠,٠٣

وبما أن أكبر تكرار معدل مكرر إذن يوجد لهذا التوزيع منوالين ولذلك سنقوم بحساب الوسيط بدلاً من المنوال

جدول التكرارات المعدلة

ف	ك	الحدود العليا للفئات	التكرارات المتجمعة الصاعدة
٨٠-	٣٠	أقل من ٨٠	صفر
١٠٠-	٣٥	أقل من ١٠٠	٣٠
١٥٠-	٧٥	أقل من ١٥٠	٦٥
٢٠٠-	٤٥	أقل من ٢٠٠	١٤٠
٢٥٠-	٣٥	أقل من ٢٥٠	١٨٥
٢٨٠-	١٥	أقل من ٢٨٠	٢٢٠
٣٥٠-٥٠٠	٥	أقل من ٣٥٠	٢٣٥
		٥٠٠ فأقل	٢٤٠

ترتيب الوسيط $ر_٢ = \frac{مجـ ك}{٢} = \frac{٢٤٠}{٢} = ١٢٠$

$$\text{ر}_{٢} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \text{طول الفئة الوسيطية} \times \frac{\text{ترتيب الوسيط – تكرار الحد الأدنى للفئة الوسيط}}{\text{تكرار الحد الأعلى للفئة الوسيطية –تكرار الحد الأدنى للفئ}}$$

$$\text{ر}_{٢} = ١٥٠ + ٥٠ \times \frac{١٢٠ - ٦٥}{١٤٠ - ٦٥} = ١٨٦,٧$$

<u>مقياس تشتت نسبى (معامل اختلاف ربيعى)</u>

$$\text{معامل الاختلاف المعيارى} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}} \times ١٠٠$$

$$\text{خ}_{\text{ع}_{١}} = \frac{\text{ع}_{١}}{\bar{\text{س}}_{١}} \times ١٠٠ = \frac{٧٨,٤}{٢٠٥,٥} \times ١٠٠ = ٣٨,٢ \,٪$$

$$\text{خ}_{\text{ع}_{٢}} = \frac{\text{ع}_{٢}}{\bar{\text{س}}_{٢}} \times ١٠٠ = \frac{٧١,٤}{١٩٣,٥} \times ١٠٠ = ٣٦,٩ \,٪$$

∴ الأجور فى مصنع (أ) أكثر تشتت من الأجور فى مصنع (ب)

$$\text{ت}_{\text{ع}_{١}} = \frac{\left(\bar{\text{س}}_{١} - \text{م}_{١}\right)}{\text{ع}_{١}} = \frac{\left(٢٠٥,٥ - ١٨٣,٣\right)}{٧٨,٦} = + ٠,٢٨$$

$$\text{ت}_{\text{ع}_{٢}} = \frac{٣\left(\bar{\text{س}}_{٢} - \text{ر}_{٢}\right)}{\text{ع}_{٢}} = \frac{٣\left(١٩٣,٥ - ١٨٦,٧\right)}{٧١,٤} = + ٠,٢٩$$

التوزيع الأول للأجور أقل إلتواءاً من التوزيع الثانى و إلتواء التوزيعين موجب جهة اليمين يقترب من التماثل

تطبيقات على الباب الرابع

الارتباط والانحدار

التطبيق الأول:

الأسعار	١٥	٢٠	٣٠	٤٥	٦٥	٧٠	٩٠	٧٠	١٠٠	٧٠
الكميات	٦	٨	٦	١٠	١٢	١٥	٦	٨	١١	١٥

المطلوب:

أ - احسب معامل ارتباط بيرسون بين الأسعار والكميات

ب - احسب معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين الأسعار والكميات

جـ- أوجد معادلة انحدار الأسعار على الكميات وتنبأ بالسعر عندما تكون الكمية ٢٠ وحدة

د - أوجد معادلة انحدار الكميات على الأسعار وتنبأ بالكمية عندما يكون السعر ١٢٠ جنيه

هـ- تأكد من صحة معامل ارتباط بيرسون عن طريق معاملى الانحدار

الحل:

أ - معامل ارتباط بيرسون بين الأسعار والكميات

سوف نرمز للسعر بالرمز س ، الكمية بالرمز ص

باختزال س إلى ح َ = $\frac{\text{س} - ٧٠}{٥}$ ← وسط فرضى لأنه أكثر تكراراً ، ← قاسم مشترك

$$\text{ر} = \frac{\text{ن} \times \text{مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\sqrt{\left\{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}\right\}\left\{\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}\right\}}}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{ن} \times \text{مجـ حَ ص} - \text{مجـ حَ} \times \text{مجـ ص}}{\sqrt{\left\{\text{ن مجـ حَ}^{٢} - (\text{مجـ حَ})^{٢}\right\}\left\{\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}\right\}}}$$

س	ص	$\text{حَ} = \frac{\text{س} - ٧٠}{٥}$	حَ ص	$\text{حَ}^{٢}$	$\text{ص}^{٢}$
١٥	٦	−١١	−٦٦	١٢١	٣٦
٢٠	٨	−١٠	−٨٠	١٠٠	٦٤
٣٠	٦	−٨	−٤٨	٦٤	٣٦
٤٥	١٠	−٥	−٥٠	٢٥	١٠٠
٦٥	١٢	−١	−١٢	١	١٤٤
٧٠	١٥	صفر	صفر	صفر	٢٢٥
٩٠	٦	٤	٢٤	١٦	٣٦
٧٠	٨	صفر	صفر	صفر	٦٤
١٠٠	١١	٦	٦٦	٣٦	١٢١
٧٠	١٥	صفر	صفر	صفر	٢٢٥
	٩٧		−١٦٦	٣٦٣	١٠٥١

$$\text{ر} = \frac{(١٠ \times -١٦٠) - (-٢٥ \times ٩٧)}{\sqrt{\left\{١٠ \times ٣٦٣ - (-٢٥)^{٢}\right\}\left\{١٠ \times ١٠٥١ - (٩٧)^{٢}\right\}}}$$

$$\text{ر} = \frac{-١٦٦٠ + ٢٤٢٥}{\sqrt{٣٠٠٥ \times ١١٠١}} = \frac{٧٦٥}{\sqrt{٣٣٠٨٥٠٥}} = ٠,٤٢$$

∴ هناك ارتباط طردى متوسط نسبياً بين الأسعار والكميات

ب – معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين الأسعار والكميات

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)}$$

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف²
١٥	٦	١	٢	١-	١
٢٠	٨	٢	٤,٥	٢,٥-	٦,٢٥
٣٠	٦	٣	٢	١	١
٤٥	١٠	٤	٦	٢-	٤
٦٥	١٢	٥	٨	٣-	٩
٧٠	١٥	٧	٩,٥	٢,٥-	٦,٢٥
٩٠	٦	٩	٢	٧	٤٩
٧٠	٨	٧	٤,٥	٢,٥	٦,٢٥
١٠٠	١١	١٠	٧	٣	٩
٧٠	١٥	٧	٩,٥	٢,٥-	٦,٢٥
					٩٨ مجـ ف²

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ٩٨}{١٠ (١٠٠ - ١)} = ١ - \frac{٥٨٨}{٩٩٠} = ١ - ٠,٥٩٤ = ٠,٤١$$

∴ هناك ارتباط طردى متوسط نسبياً بين س ، ص

يلاحظ أنه نفس الناتج تقريباً سواء بطريقة بيرسون أو سبيرمان

جـ- معادلة انحدار الأسعار (س) على الكميات (ص)

س = جـ ص + د

$$\because \text{جـ} = \frac{\text{ن} \times \text{مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن} \times \text{مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}}$$

باستخدام جدول الارتباط في (أ)

$$\therefore \text{جـ} = \frac{\text{ن} \times \text{مجـ ح ص} - \text{مجـ ح} \times \text{مجـ ص}}{\left\{ \text{ن} \times \text{مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢} \right\}}$$

$$\text{جـ} = \frac{(١٠ \times -١٦٦) - (-٢٥ \times ٩٧)}{\left\{ ١٠ \times ١٠٥١ - (٩٧)^{٢} \right\}}$$

$$= \frac{٧٦٥}{١١٠١} = ٠,٧$$

$$\because \text{د} = \overline{\text{س}} - \text{جـ} \, \overline{\text{ص}}$$

$\because \overline{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ح}}{\text{ن}} \times ٥ + ٧٠$ ⟵ لأن الوسط يتأثر بالعمليات الحسابية

$$، \overline{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$$

$\therefore \overline{\text{س}} = \frac{-٢٥}{١٠} \times ٥ + ٧٠ = ٥٧,٥$ جنيه

$، \overline{\text{ص}} = \frac{٩٧}{١٠} = ٩,٧$ وحدة

$$\therefore \text{د} = ٥٧,٥ - (٠,٧ \times ٩,٧) = ٥٠,٧$$

∴ المعادلة هى:

س = جـ ص + د

س = ٠,٧ ص + ٥٠,٧

التنبؤ بالسعر (س) عندما تكون الكمية (ص) = ٢٠ وحدة:

بالتعويض فى المعادلة عن قيمة (ص) = ٢٠

∴ س = ٠,٧ × ٢٠ + ٥٠,٧ = ٦٤,٧ جنيه

<u>د – ايجاد معادلة انحدار الكميات على الأسعار (ص/س)</u>

ص = أ س + ب

$$\because \text{أ} = \frac{(\text{ن} \times \text{مجـ ح َص}) - (\text{مجـ ح َ} \times \text{مجـ ص})}{\text{ن} \times \text{مجـ ح َ}^{٢} - (\text{مجـ ح َ})^{٢}}$$

$$\text{أ} = \frac{(١٠ \times -١٦٦) - (-٢٥ \times ٩٧)}{١٠ \times ٣٦٣ - (-٢٥)^{٢}} = \frac{٧٦٥}{٣٠٠٥}$$

∴ أ = ٠,٢٥

$$\text{ب} = \overline{\text{ص}} - \text{أ}\ \overline{\text{س}}$$

$$\text{ب} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} - ٠,٢٥ \times \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{٩,٧}{١٠} - (٠,٢٥ \times ٥٧,٥)$$

∴ ب = –٤,٧

∴ معادلة انحدار ص / س هى:

ص = ٠,٢٥ س – ٤,٧٠

التنبؤ بالكمية ص عندما يكون السعر س = ١٢٠ جنيه

ص = ٠,٢٥ × ١٢٠ + ٤,٧

∴ ص = ٢٥,٣ وحدة

<u>هـ– التأكد من صحة معامل ارتباط بيرسون عن طريق معاملى الانحدار</u>

∵ ر = $\sqrt{\text{أ × جـ}}$

∴ ر = $\sqrt{\text{٠,٢٥ × ٠,٧}}$

∴ ر = ٠,٤٢ معامل الارتباط يتطابق مع الإجابة السابقة

<u>التطبيق الثانى:</u>

فيما يلى بيان الأسعار (س) والكميات (ص) لعينة حجمها ٣٠٠ سلعة فى إحدى المشروعات التجارية:

س / ص	٢٠–	٣٠–	٤٠–	٥٠–٦٠	المجموع
١٠	١٨	٣٢	٧	–	٥٧
١٦	٢١	٥٨	١٨	١٢	١٠٩
٢٢	–	٧٥	٥٣	٦	١٣٤
المجموع	٣٩	١٦٥	٧٨	١٨	٣٠٠

المطلوب:

١. احسب معامل ارتباط بيرسون ومعامل التحديد وعلق على النتائج

٢. اوجد معادلة انحدار (ص/س) ثم تنبأ بالكمية المتوقعة عندما يكون السعر ٨٠ جنيه

الحل:

١) معامل ارتباط بيرسون ومعامل التحديد

بما أن الفئات متساوية فيمكن حل هذا التطبيق بطريقة الانحرافات المختزلة كما يلى:

ص \ س	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-٦٠	ك ص	ح ص	ك ص ح ص	ك ص ح ص ٢	ك ح س ح ص
١٠	١٨ / ١٨	صفر / ٣٢	-٧ / ٧	صفر / -	٥٧	-١	-٥٧	٥٧	١١
١٦	صفر / ٢١	صفر / ٥٨	صفر / ١٨	صفر / ١٢	١٠٩	صفر	صفر	صفر	صفر
٢٢	صفر / -	صفر / ٧٥	٥٣ / ٥٣	١٢ / ٦	١٣٤	+١	١٣٤	١٣٤	٦٥
ك س	٣٩	١٦٥	٧٨	١٨	٣٠٠		٧٧	١٩١	٧٦
ح س	-١	صفر	+١	+٢					
ك س ح س	-٣٩	صفر	٧٨	٣٦	٧٥				
ك س ح س ٢	٣٩	صفر	٧٨	٧٢	١٨٩				
ك ح س ح ص	١٨	صفر	٤٦	١٢	٧٦				

$$ر = \frac{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ح}_{س} \text{ح}_{ص} - \text{مجـ ك}_{س}\text{ح}_{س} \times \text{مجـ ك}_{ص}\text{ح}_{ص}}{\sqrt{\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك}_{س}\text{ح}_{س}^{٢} - \left(\text{مجـ ك}_{س}\text{ح}_{س}\right)^{٢}\right\}\left\{\text{مجـ ك} \times \text{مجـ ك}_{ص}\text{ح}_{ص}^{٢} - \left(\text{مجـ ك}_{ص}\text{ح}_{ص}\right)^{٢}\right\}}}$$

$$\text{ر} = \frac{(٣٠٠ \times ٧٦) - (٧٥ \times ٧٧)}{\sqrt{\{٣٠٠ \times ١٨٩ - (٧٥)^{٢}\}\{٣٠٠ \times ١٩١ - (٧٧)^{٢}\}}}$$

$$\text{ر} = \frac{٢٢٨٠٠ - ٥٧٧٥}{\sqrt{(٥٦٧٠٠ - ٥٦٢٥)(٥٧٣٠٠ - ٥٩٢٩)}}$$

$$\text{ر} = \frac{١٧٠٢٥}{\sqrt{٥١٠٧٥ \times ٥١٣٧١}}$$

$\text{ر} = \frac{١٧٠٢٥}{٥١٢٢٢,٧٩} = + ٠,٣٣$ ارتباط طردى أقل من المتوسط

معامل التحديد $\text{ر}^{٢} = (٠,٣٣)^{٢} = ٠,١١$

أى أن تأثير المتغير المستقل على المتغير التابع ١١٪ بمعنى آخر أن التغير فى المتغير التابع ١١٪ منه بسبب المتغير المستقل والباقى ٨٩٪ من التغير يرجع لعوامل عشوائية

٢) معادلة انحدار (ص/س)

ص = أ س + ب

حيث (أ) = بسط معامل الارتباط على قوس (س) بدون الجذر التربيعى

$\text{أى أن أ} = \frac{١٧٠٢٥}{٥١٠٧٥} = ٠,٣٣٣$

$$\overline{\text{س}} = \text{ط}_{\text{س}} \times \frac{\text{مجـ ك ح}_{\text{س}}}{\text{مجـ ك}} + \text{أ}_{\text{س}}$$

$$\overline{س} = ١٠ \times \frac{٧٥}{٣٠٠} + ٣٥ = ٣٧,٥ \text{ جنيه}$$

$$\overline{ص} = ط_{ص} \times \frac{مجـ ك_{ص} ح_{ص}}{مجـ ك} + أ_{ص}$$

$$\overline{ص} = ٦ \times \frac{٧٧}{٣٠٠} + ١٦ = ١٧,٥٤ \text{ وحدة}$$

$$\therefore ب = \overline{ص} - أ \overline{س}$$

$$ب = ١٧,٥٤ - (٠,٣٣٣ \times ٣٧,٥) = ١٧,٥٤ - ١٢,٤٩$$

$$\therefore ب = ٥,٠٥$$

وتكون معادلة انحدار ص / س هى:

ص = أ س + ب

ص = ٠,٣٣٣ س + ٥,٠٥

عندما س = ٨٠

$$\therefore ص = ٠,٣٣٣ \times ٨٠ + ٥,٠٥ = ٣١,٦٩ \text{ وحدة}$$

تطبيقات على الباب الخامس

تحليل السلاسل الزمنية

التطبيق الأول:

فيما يلي بيان بالانتاج السنوى بالمليون جنيه لأحد مصانع الغزل والنسيج:

السنة	٢٠٠٨	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣	٢٠١٤
الانتاج	١٢٥	٢٥٠	٣٧٥	٦٣٠	٨٢٠	٩٩٠	١٢١٠

المطلوب:

١. أوجد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة ثم تنبأ بقيمة الانتاج المتوقع عام ٢٠١٦

٢. أوجد ($\frac{ص}{\hat{ص}}$ × ١٠٠) وعلق على مدى صحة توفيق الخط المستقيم

الحل:

السنة	الانتاج ص	س	س ص	$س^{٢}$	$\hat{ص}$	$\frac{ص}{\hat{ص}}$ × ١٠٠
٢٠٠٨	١٢٥	صفر	صفر	صفر	٧٣,٦	١٦٩,٨٪
٢٠٠٩	٢٥٠	١	٢٥٠	١	٢٥٨,٦	٩٦,٧٪
٢٠١٠	٣٧٥	٢	٧٥٠	٤	٤٤٣,٦	٨٤,٥٪
٢٠١١	٦٣٠	٣	١٨٩٠	٩	٦٢٨,٦	١٠٠,٢٪
٢٠١٢	٨٢٠	٤	٣٢٨٠	١٦	٨١٣,٦	١٠٠,٨٪
٢٠١٣	٩٩٠	٥	٤٩٥٠	٢٥	٩٩٨,٦	٩٩,١٪
٢٠١٤	١٢١٠	٦	٧٢٦٠	٣٦	١١٨٤	١٠٢,٢٪
المجموع	٤٤٠٠ مج ص	٢١ مج س	١٨٣٨٠ مج س ص	٩١ مج $س^{٢}$		

اعتبرنا ٢٠٠٨ سنة أساس أو نقطة أصل

$$أ = \frac{ن \times مجـ س ص - مجـ س \times مجـ ص}{ن \times مجـ س^{٢} - (مجـ س)^{٢}}$$

$$أ = \frac{٧ \times ١٨٣٨٠ - ٢١ \times ٤٤٠٠}{٧ \times ٩١ - ٢١ \times ٢١} = \frac{٣٦٢٦٠}{١٩٦} = ١٨٥$$

$ب = \overline{ص} - أ \overline{س}$

$$= \frac{٤٤٠٠}{٧} - ١٨٥ \times \frac{٢١}{٧} = ٦٢٨,٦ - ٥٥٥ = ٧٣,٦$$

∴ معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هى:

ص = ١٨٥ س + ٧٣,٦

إيجاد القيم الاتجاهية $\hat{ص}$ وذلك بالتعويض فى معادلة الخط المستقيم السابقة بقيم س (٠ ، ١ ، ٢ .... ، ٦)

$\hat{ص}_{٢٠٠٨} = ١٨٥ \times ٠ + ٧٣,٦ = ٧٣,٦$

$\hat{ص}_{٢٠٠٩} = ١٨٥ \times ١ + ٧٣,٦ = ٢٥٨,٦$

وهكذا يمكن إضافة أ على أى قيمة اتجاهية لإيجاد القيمة الاتجاهية التالية.

<u>التنبؤ بالإنتاج عام ٢٠١٦</u>

س = السنة المطلوبة – نقطة الأصل

= ٢٠١٦ – ٢٠٠٨ = ٨

∴ ص = ١٨٥ × ٨ + ٧٣,٦ = ١٥٥٣,٦ مليون جنيه

باستثناء القيم الاتجاهية المعدلة عند عامى ٢٠٠٨ ، ٢٠١٠ نجد أن باقى القيم الاتجاهية قريبة جداً من ١٠٠٪ لذلك يمكن اعتبار أن توفيق الخط المستقيم يعتبر توفيقاً جيداً.

التطبيق الثانى:

فيما يلى بيان بالمبيعات الربع سنوية بملايين الجنيهات لإحدى الشركات الصناعية خلال عامى ٢٠١٣ ، ٢٠١٤:

	٢٠١٣				٢٠١٤			
الربع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
المبيعات	٦٥	٩٥	٤٥	١٤٥	٨٥	١٢٠	٦٥	١٧٠

المطلوب:

١. تحديد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة

٢. تحديد القيم الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام

٣. إعداد الدليل الموسمى

٤. احسب المبيعات الربع سنوية المتوقعة خلال عام ٢٠١٦

الحل:

(١) تحديد معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية السابقة

السنة	الربع	ص	س	$س^2$	س ص	$\hat{ص}$	$\frac{ص}{\hat{ص}} \times ١٠٠$
٢٠١٣	الأول	٦٥	٠	٠	٠	٦٧,٥٠	٩٦,٣٠٪
	الثانى	٩٥	١	١	٩٥	٧٦,٩٣	١٢٣,٥٠٪
	الثالث	٤٥	٢	٤	٩٠	٨٥,٣٦	٥٢,٧٠٪
	الرابع	١٤٥	٣	٩	٤٣٥	٩٤,٢٩	١٥٣,٨٠٪
٢٠١٤	الأول	٨٥	٤	١٦	٣٤٠	١٠٣,٢٢	٨٢,٣٠٪
	الثانى	١٢٠	٥	٢٥	٦٠٠	١١٢,١٥	١٠٧,٠٠٪
	الثالث	٦٥	٦	٣٦	٣٩٠	١٢٠,٠٨	٥٤,١٠٪
	الرابع	١٧٠	٧	٤٩	١١٩٠	١٣٠,٠١	١٣٠,٨٠٪
المجموع		٧٩٠ مج ص	٢٨ مج س	١٤٠ مج $س^2$	٣١٤٠ مج س ص		

اعتبرنا الربع الأول لعام ٢٠١٣ هو نقطة الأصل (الوسط الفرضى)

معادلة خط الاتجاه العام هى: ص = أ س + ب

$$\text{حيث أ} = \frac{\text{ن} \times \text{مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن} \times \text{مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$= \frac{٨ \times ٣١٤٠ - ٢٨ \times ٧٩٠}{٨ \times ١٤٠ - ٢٨ \times ٢٨} = ٨,٩٣$$

ب = $\overline{\text{ص}}$ – أ $\overline{\text{س}}$

$$= \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} - \text{أ} \times \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{٧٩٠}{٨} - ٨,٩٣ \times \frac{٢٨}{٨}$$

$$= ٦٧,٥$$

∴ معادلة خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هى:

ص = ٨,٩٣ س + ٦٧,٥

(٢) تحديد القيمة الاتجاهية $\hat{\text{ص}}$:

لإيجاد القيم الاتجاهية يتم التعويض فى معادلة خط الاتجاه العام عن س بالقيم من ٠ ، ١ ، ٢ ، .... إلى ٧ فى معادلة الاتجاه العام:

$\hat{\text{ص}}_{١}$ = ٨,٩٣ × ٠ + ٦٧,٥ = ٦٧,٥

وبإضافة أ وهى ٨,٩٣ على كل قيمة اتجاهية لإيجاد القيم الاتجاهية التالية:

$\hat{ص}_٢$ = ٧٦,٩٣ وهكذا

(٣) إعداد الدليل الموسمى:

الربع \ القيم الاتجاهية	القيمة الاتجاهية المخلصة من أثر الاتجاه العام		مجموع القيمة الاتجاهية	الدليل الموسمى ٪
	٢٠١٣ ٪	٢٠١٤ ٪		
الأول	٩٦,٣٠	٨٢,٣٠	١٧٨,٦	٨٩,٣٠
الثانى	١٢٣,٥٠	١٠٧,٠٠	٢٣٠,٥	١١٥,٢٥
الثالث	٥٢,٧٠	٥٤,١٠	١٠٦,٨	٥٣,٤٠
الرابع	١٥٣,٨٠	١٣٠,٨٠	٢٨٤,٦	١٤٢,٣٠
			المجموع	٤٠٠,٢٥

مجموع الدليل الموسمى = ١٠٠٪ × عدد الفترات فى السنة

= ١٠٠٪ × ٤ = ٤٠٠٪

وفى حالة اختلاف المجموع الكلى عن ٤٠٠٪ يتم تعديل قيم الدليل الموسمى عن طريق معامل تصحيح حيث:

$$\text{معامل تصحيح الدليل الموسمى} = \frac{٤٠٠ \%}{٤٠٠,٢٥ \%} = ٠,٩٩٩٣٧٥$$

الدليل الموسمى المعدل:

الربع	الدليل الموسمى المعدل ٪	الدليل الموسمى المعدل المطلق
الأول	٨٩,٣٠ × ٠,٩٩٩٣٧٥ = ٨٩,٢٤	٠,٨٩٢٤
الثانى	١١٥,٢٥ × ٠,٩٩٩٣٧٥ = ١١٥,١٨	١,١٥١٨
الثالث	٥٣,٤٠ × ٠,٩٩٩٣٧٥ = ٥٣,٣٧	٠,٥٣٣٧
الرابع	١٤٢,٣٠ × ٠,٩٩٩٣٧٥ = ١٤٢,٢١	١,٤٢٢١
المجموع	٤٠٠	٤

(٤) حساب المبيعات الربع سنوية المتوقعة خلال عام ٢٠١٦

الربع	المبيعات المتوقعة عام ٢٠١٦ صَ = (٨,٩٣ س + ٦٧,٥) × الدليل الموسمى المعدل المطلق
الأول	صَ = (٨,٩٣ × ١٢ + ٦٧,٥) × ٠,٨٩٢٤ = ١٥٥,٨٧
الثانى	صَ = (٨,٩٣ × ١٣ + ٦٧,٥) × ١,١٥١٨= ٢١١,٤٦
الثالث	صَ = (٨,٩٣ × ١٤ + ٦٧,٥) × ٠,٥٣٣٧ = ١٠٢,٧٥
الرابع	صَ = (٨,٩٣ × ١٥ + ٦٧,٥) × ١,٤٢٢١ = ٢٨٦,٤٨

تطبيقات على الباب السادس

الأرقام القياسية

تطبيق:

القطاع	الأجور بالألف		عدد العمال بالألف	
	٢٠٠٢	٢٠٠٨	٢٠٠٢	٢٠٠٨
الصناعى	١٥٠	٣٥٠	٣٠	٦٥
الزراعى	٤٠٠	٨٥٠	٧٥	٢٧٠
التجارى	٣٠٠	٥٠٠	٤٠	١٨٠
الخدمات	١٠٠	٢٥٠	١٠	٨٠

إذا كان الرقم القياسى لنفقة المعيشة عام ٢٠٠٢ يبلغ ٧٥٪ والرقم القياسى لنفقة المعيشة عام ٢٠٠٨ يبلغ ٣٠٠٪ المطلوب:

١- حساب الرقم القياسى الأمثل للأجور

٢- الرقم القياسى للأجر الحقيقى وعلق على الناتج

الحل:

القطاع	ع.	ع١	ك.	ك١	ع. ك.	ع. ك١	ع١ ك.	ع١ ك١
الصناعى	١٥٠	٣٥٠	٣٠	٦٥	٤٥٠٠	٩٧٥٠	١٠٥٠٠	٢٢٧٥٠
الزراعى	٤٠٠	٨٥٠	٧٥	٢٧٠	٣٠٠٠٠	١٠٨٠٠٠	٦٣٧٥٠	٢٢٩٥٠٠
التجارى	٣٠٠	٥٠٠	٤٠	١٨٠	١٢٠٠٠	٥٤٠٠٠	٢٠٠٠٠	٩٠٠٠٠
الخدمات	١٠٠	٢٥٠	١٠	٨٠	١٠٠٠	٨٠٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠٠
					٤٧٥٠٠	١٧٩٧٥٠	٩٦٧٥٠	٣٦٢٢٥٠

$$\text{الرقم القياسى الأمثل لفيشر} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ ك}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ ك}_1}} \times ١٠٠$$

$$= \sqrt{\frac{٩٦٧٥٠}{٤٧٥٠٠} \times \frac{٣٦٢٢٥٠}{١٧٩٧٥٠}} \times ١٠٠$$

$$= ٢٠٢,٦ \ \%$$

$$\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة} = \frac{٣٠٠}{٧٥} \times ١٠٠ = ٤٠٠ \%$$

$$\text{الرقم القياسى للأجر الحقيقى} = \frac{٢٠٢,٦}{٤٠٠} \times ١٠٠ = ٥٠,٦٥ \%$$

أى أن الأجر الحقيقى انخفض ٤٩,٣٥ ٪

تطبيقات على الباب السابع

التوزيعات الاحتمالية

التطبيق الأول:

تبين لأحد المصانع المنتجة لقطع غيار التليفزيون أن متوسط عمر اللمبة هو ١٠٠٠ ساعة تشغيل وأن الانحراف المعيارى هو ٤٠ ساعة احسب الاحتمالات التالية:

١- احتمال أن يتراوح عمر إحدى اللمبات بين ١٠٠٠ ساعة ، ١١٠٠ ساعة

٢- احتمال أن يتراوح عمر إحدى اللمبات بين ٩٥٠ ساعة ، ١٠٨٠ ساعة

٣- احتمال أن يكون عمر إحدى اللمبات المختارة عشوائياً ١٠٤٠ ساعة على الأقل

٤- احتمال ألا يزيد عمر إحدى اللمبات عن ١٠٢٠ ساعة

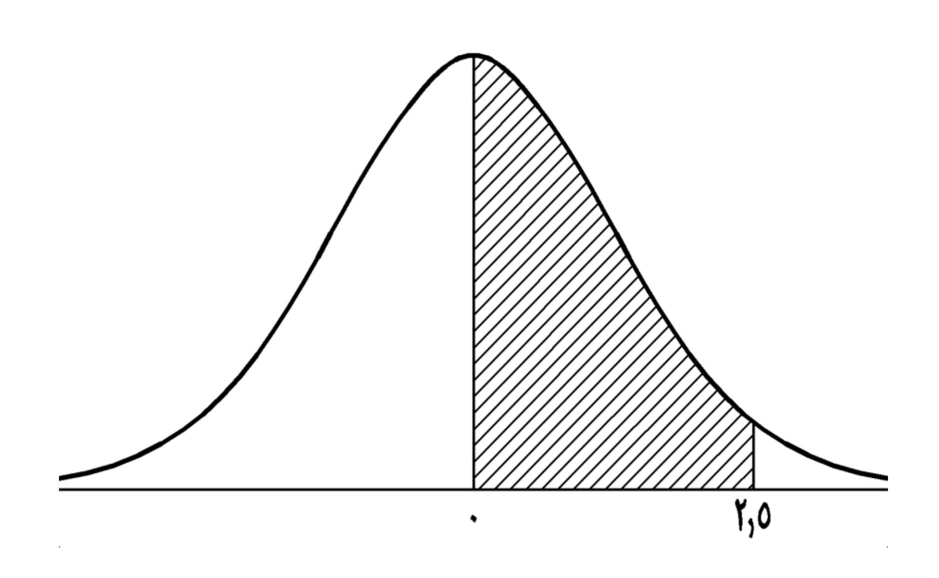
الحل:

١- احتمال أن يتراوح عمر إحدى اللمبات بين ١٠٠٠ ساعة , ١١٠٠ ساعة:

ل (١٠٠٠≥ س ≥ ١١٠٠) = ل (٠ ≥ د ≥ ٢,٥) = ٠,٤٩٣٨

حيث $د_١ = \frac{س-م}{ع} = \frac{١٠٠٠-١٠٠٠}{٤٠} =$ صفر

، $د_٢ = \frac{س-م}{ع} = \frac{١١٠٠-١٠٠٠}{٤٠} = ٢,٥$



٢- احتمال أن يتراوح عمر إحدى اللمبات بين ٩٥٠ ساعة , ١٠٨٠ ساعة:

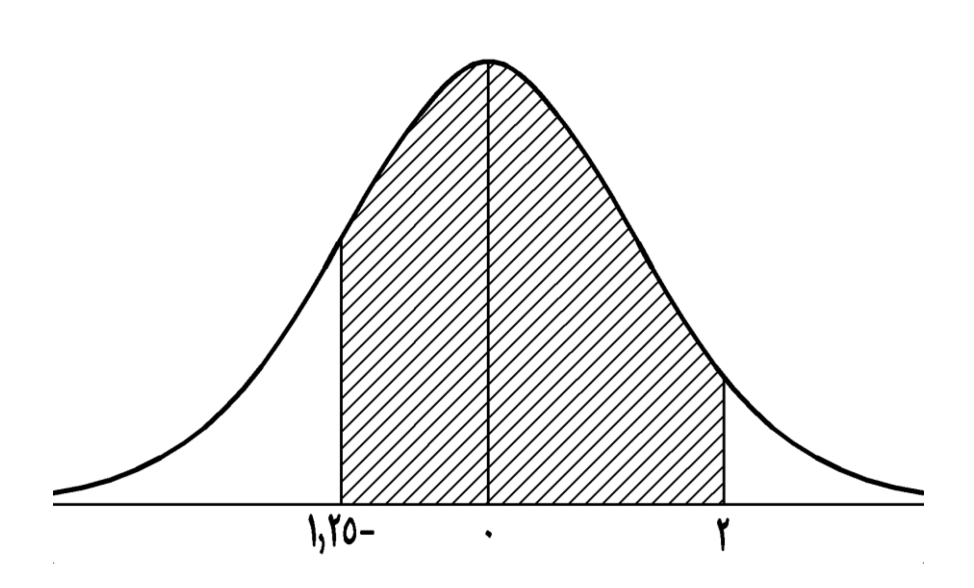
ل (٩٥٠≥ س ≥ ١٠٨٠) = ل (-١,٢٥ ≥ د ≥ ٢)

= ل(٠≥ د ≥ ٢) + ل(٠≥ د ≥ ١,٢٥) = ٠,٤٧٧٢ + ٠,٣٩٤٤

= ٠,٨٧١٦

حيث $د_١$ = $\frac{س-م}{ع}$ = $\frac{٩٥٠-١٠٠٠}{٤٠}$ = - ١,٢٥

، $د_٢$ = $\frac{س-م}{ع}$ = $\frac{١٠٨٠-١٠٠٠}{٤٠}$ = ٢

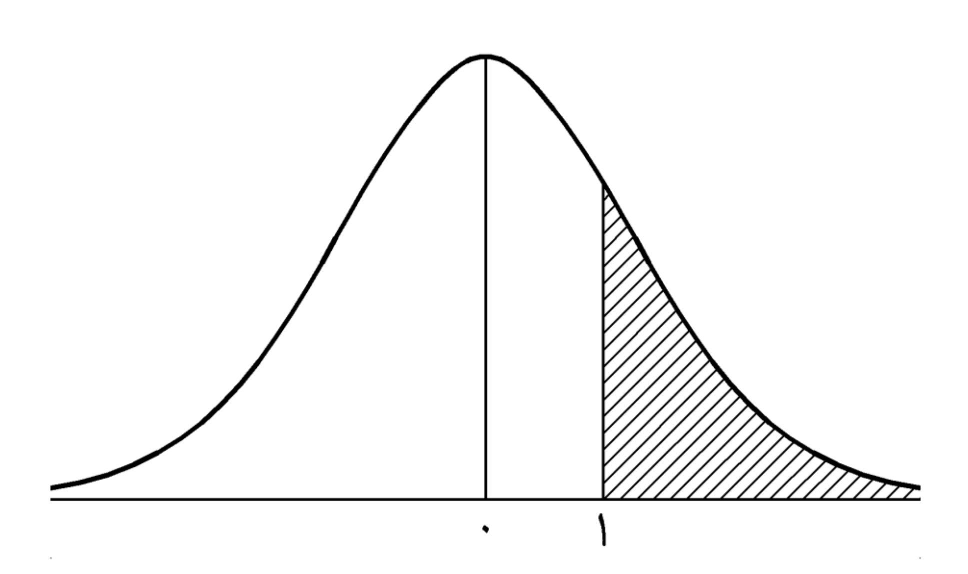


٣- احتمال أن يكون عمر إحدى اللمبات المختارة عشوائياً ١٠٤٠ ساعة على الأقل:

ل (س ≥ ١٠٤٠) = ل (د ≥ ١)

= ٠,٥ - ل (٠≤ د ≤ ١) = ٠,٥- ٠,٣٤١٣ = ٠,١٥٨٧

حيث د = $\frac{\text{س} - \text{م}}{\text{ع}}$ = $\frac{١٠٤٠ - ١٠٠٠}{٤٠}$ = ١



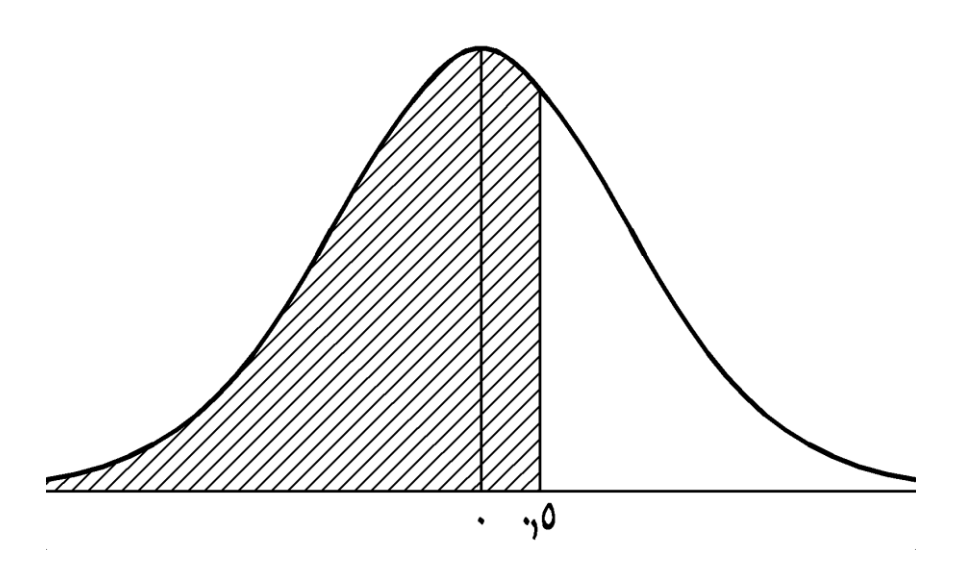
٤- احتمال ألا يزيد عمر إحدى اللمبات عن ١٠٢٠ ساعة

ل (س ≤ ١٠٢٠) = ل (د ≤ ٠,٥)

= ٠,٥ + ل (٠≤ د ≤٠,٥)

= ٠,٥ + ٠,١٩١٥ = ٠,٦٩١٥

حيث د = $\frac{\text{س}-\text{م}}{\text{ع}}$ = $\frac{١٠٢٠-١٠٠٠}{٤٠}$ = ٠,٥

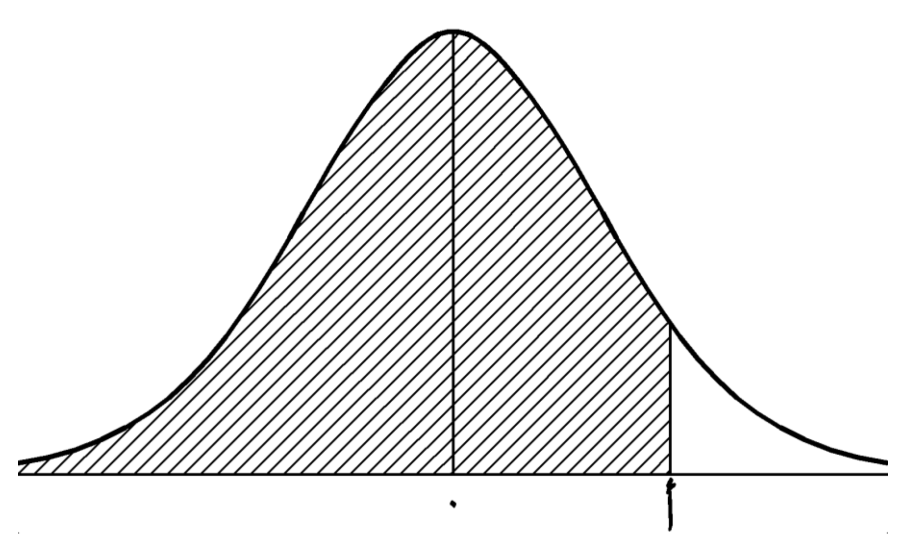


التطبيق الثانى:

فى مجتمع معين يتبع التوزيع الطبيعى العادى مركزه ٤٠ وانحرافه المعيارى ٦، حُسب إحتمال أن يأخذ المتغير العشوائى المعيارى قيمة معينة أو أقل منها (قيمة معينة على الأكثر) = ٠,٩٥٠٣

الحل:

ل (د ≤ أ) = ٠,٩٥٠٣



∴ ل (٠ ≤ د ≤ أ) = ٠,٩٥٠٣ − ٠,٥ = ٠,٤٥٠٣

بالبحث عن هذا الاحتمال بالجدول نجد أنه يقع عند د = ١,٦٥

$$\because \text{د} = \frac{\text{س} - \text{م}}{\text{ع}}$$

$$\therefore ١,٦٥ = \frac{\text{س} - ٤٠}{٦}$$

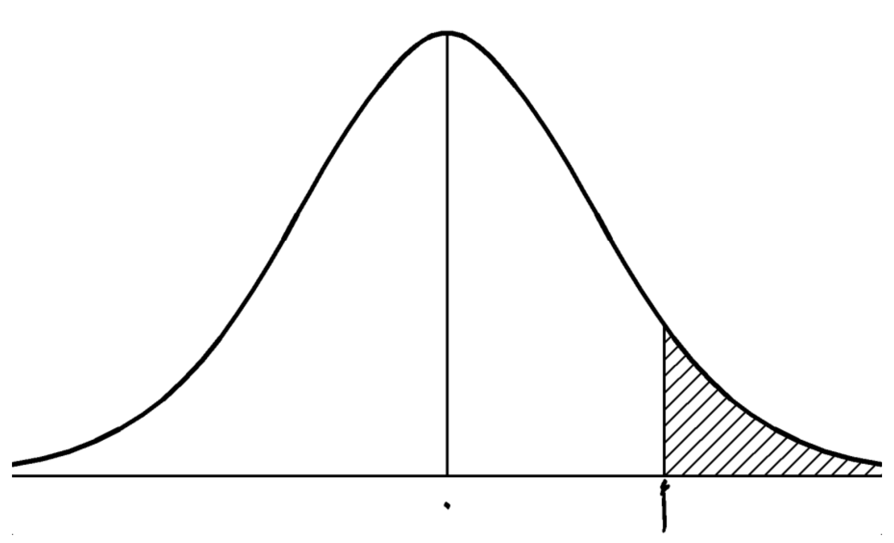
$$\therefore \text{س} = ٤٩,٩$$

التطبيق الثالث:

أوجد عدد الساعات التى يعمل عندها أو أكثر منها ٣٠٪ من اللمبات المنتجة للتليفزيون إذا كان متوسط ساعات تشغيل اللمبة الواحدة ١٠٠٠ ساعة والانحراف المعيارى ٢٠٠ ساعة.

الحل:

ل (د ≤ أ) = ٠,٣٠



∴ ل (٠ ≥ د ≥ أ) = ٠,٥− ٠,٣ = ٠,٢

بالبحث عن هذا الاحتمال بالجدول نجد أن د = ٠,٥٢تقريباً

∵ د = $\frac{\text{س}-\text{م}}{\text{ع}}$

∴ ٠,٥٢ = $\frac{\text{س}-١٠٠٠}{٢٠٠}$

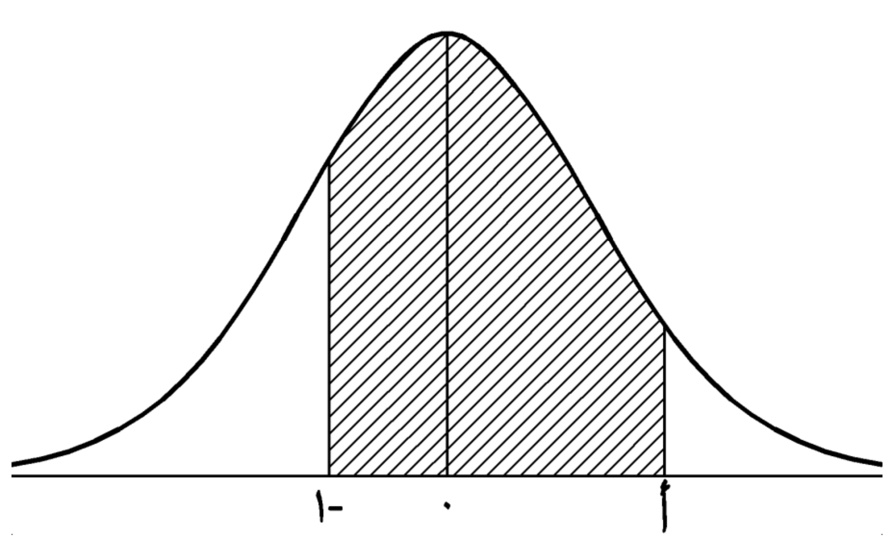
∴ س = ١١٠٤ ساعة

التطبيق الرابع:

فى مجتمع معين يتبع التوزيع الطبيعى العادى مركزه ٥٠ وانحرافه المعيارى ٨ ، وُجد أن ل (−١ ≤ د ≤ أ) = ٠,٧٧٤٥ احسب القيمة المعيارية أ على المحور الأفقى ثم القيمة الأصلية للمتغير س

الحل:

ل (٠ ≤ د ≤ أ) + ل (٠ ≤ د ≤ ١) = ٠,٧٧٤٥



ل (٠ ≤ د ≤ أ) + ٠,٣٤١٣ = ٠,٧٧٤٥

∴ ل (٠ ≤ د ≤ أ) = ٠,٤٣٣٢ بالبحث عن هذا الاحتمال بالجدول نجد أن د = ١,٥

∴ ١,٥ = $\frac{\text{س} - ٥٠}{٨}$

∴ س = ٦٢

تطبيقات على الباب الثامن

نظرية العينات

التطبيق الأول:

بلغ متوسط الأجر فى عينة من مصنع حجمها ٨٠ عاملاً ١٥٠ جنيه وإذا كان تباين الأجر فى هذه الصناعة يبلغ ٣٦ جنيه قدر بدرجة ثقة ٩٥٪ ، ٩٩٪ متوسط الأجر فى المجتمع عموماً.

الحل:

مركز المجتمع (م) يتراوح بين:

(أ) $\bar{س} \pm ١,٩٦ \times \frac{عَ}{\sqrt{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$١٥٠ \pm ١,٩٦ \times \frac{٦}{\sqrt{٨٠}}$

$١٥٠ \pm ١,٣$

١٤٨,٧ جنيه ، ١٥١,٣ جنيه بدرجة ثقة ٩٥٪

(ب) $س \pm ٢,٥٨ \times \frac{عَ}{\sqrt{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٩٪

$١٥٠ \pm ٢,٥٨ \times \frac{٦}{\sqrt{٨٠}}$

$١٥٠ \pm ١,٧$

١٤٨,٣ جنيه ، ١٥١,٧ جنيه بدرجة ثقة ٩٩٪

التطبيق الثانى:

عينة حجمها ١٠٠ عامل من عمال قطاع صناعة الغزل والنسيج كان توزيعهم على فئات الأجر المختلفة كما يلى:

فئات الأجر	١٠٠–	١٢٠–	١٤٠–	١٦٠–	١٨٠–٢٠٠
عدد العمال	١٠	٢٥	٣٥	٢٠	١٠

المطلوب:

(أ) حساب متوسط الأجر لهذه العينة

(ب) حساب متوسط الأجر فى القطاع عند مستوى معنوية α=١٪

الحل:

ف	ك	س	ح أ =١٥٠	حَ ط = ٢٠	ك حَ	ك حَ٢
١٠٠–	١٠	١١٠	٤٠–	٢–	٢٠–	٤٠
١٢٠–	٢٥	١٣٠	٢٠–	١–	٢٥–	٢٥
١٤٠–	٣٥	١٥٠	٠	٠	٠	٠
١٦٠–	٢٠	١٧٠	٢٠+	١+	٢٠+	٢٠
١٨٠–٢٠٠	١٠	١٩٠	٤٠+	٢+	٢٠+	٤٠
المجموع	١٠٠				٥–	١٢٥

(أ) حساب متوسط الأجر لهذه العينة

$$\bar{س} = \frac{مجـ ك حَ}{مجـ ك} \times ط + أ$$

$$= \frac{-٥}{١٠٠} \times ٢٠ + ١٥٠ = ١٤٩ \text{ جنيه}$$

(ب) حساب متوسط الأجر فى القطاع عند مستوى معنوية ∝ = ١٪

$$ع^{٢} = ط^{٢} \times \left\{ \frac{مجـ ك ح^{٢}}{مجـ ك} - \left(\frac{مجـ ك ح}{مجـ ك}\right)^{٢} \right\}$$

$$= ٤٠٠ \times \left\{ \frac{١٢٥}{١٠٠} - \left(\frac{-٥}{١٠٠}\right)^{٢} \right\} = ٤٩٩$$

$$\therefore ع = \sqrt{٤٩٩} = ٢٢,٣$$

متوسط الأجر فى القطاع (م) يتراوح بين:

$$\bar{س} \pm ٢,٥٨ \times \frac{ع}{\sqrt{ن}} \qquad \text{بدرجة ثقة ٩٩٪}$$

$$١٤٩ \pm ٢,٥٨ \times \frac{٢٢,٣}{\sqrt{١٠٠}}$$

$$١٤٩ \pm ٥,٨$$

١٤٣,٢ جنيه ، ١٥٤,٨ جنيه بدرجة ثقة ٩٩٪

<u>ثانياً: المجتمع الذى يقدر مركزه على شكل نسبة:</u>

النسبة فى المجتمع (ح) تتراوح بين:

$$ح \pm د \times \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}} \qquad \text{بدرجة ثقة معينة}$$

$$ح \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}} \qquad \text{بدرجة ثقة ٩٥٪}$$

$$ح \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}} \qquad \text{بدرجة ثقة ٩٩٪}$$

التطبيق الثالث:

بلغت نسبة الأميين فى عينة من قرى الريف المصرى حجمها ٥٠٠٠ فرد ٦٠٪ احسب عند مستوى معنوية ∝ = ٥٪ ، ١٪ نسبة الأميين فى مجتمع الريف المصرى عموماً.

الحل:

النسبة فى المجتمع (ح) تتراوح بين:

$\hat{ح} \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$٠,٦٠ \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{٠,٦ \times ٠,٤}{٥٠٠٠}}$ بدرجة ثقة ٩٥٪

٠,٦٠ ± ٠,٠١٤ بدرجة ثقة ٩٥٪

٠,٥٨٦ ، ٠,٦١٤

٥٨,٦٪ ، ٦١,٤٪ بدرجة ثقة ٩٥٪

النسبة فى المجتمع (ح) تتراوح بين:

$\hat{ح} \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{\hat{ح}\hat{ل}}{ن}}$ بدرجة ثقة ٩٩٪

$٠,٦٠ \pm ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{٠,٦ \times ٠,٤}{٥٠٠٠}}$ بدرجة ثقة ٩٩٪

٠,٦٠ ± ٠,٠١٨ بدرجة ثقة ٩٩٪

٠,٥٨٢ ، ٠,٦١٨

٥٨,٢٪ ، ٦١,٨٪ بدرجة ثقة ٩٩٪

التطبيق الرابع:

بلغ متوسط وزن الطالب فى عينة حجمها ٥٠٠ طالب من طلاب كلية التجارة ٧٢ كيلوجرام ، إذا كان متوسط الوزن لطلاب الكلية عموماً يبلغ ٦٩ كيلوجرام وتباين الوزن فى الكلية ٤٩ كيلوجرام هل يمكن القول أن هذه العينة عشوائية وتنتمى لطلبة كلية تجارة أم لا بدرجة ثقة ٩٩٪

الحل:

ن = ٥٠٠ ، $\overline{س}$ = ٧٢ ، م =٦٩ ، $\acute{ع}^{٢}$ = ٤٩ ∴ $\acute{ع}$ = ٧

حساب فترة ثقة مناسبة:

$$م \pm د \times \frac{\acute{ع}}{\sqrt{ن}}$$ بدرجة ثقة معينة

$$٦٩ \pm ٢,٥٨ \times \frac{٧}{\sqrt{٥٠٠}}$$ بدرجة ثقة ٩٩٪

= ٦٩ ± ٠,٨ بدرجة ثقة ٩٩٪

٦٨,٢ كيلو ، ٦٩,٨ كيلو بدرجة ثقة ٩٩٪

∵ متوسط العينة خارج فترة الثقة ∴ العينة غير عشوائية أو لا تنتمى لطلبة كلية تجارة (ض١ H_1)

التطبيق الخامس:

نسبة البطالة فى مجتمع ما خلال عام ٢٠٠٨ بلغت ٨٪ ، بأخذ عينة حجمها ١٠٠٠ شخص فوُجد أن بينهم ١٠٠ شخص عاطل هل يمكن القول أن هذه العينة عشوائية أم لا ؟ وذلك عند مستوى معنوية $\propto$ = ٥٪

الحل:

$$ح = ٠,٠٨ \quad ، \quad \hat{ح} = \frac{١٠٠}{١٠٠٠} = ٠,١٠ \quad ، \quad ن = ١٠٠٠$$

$$\therefore ل = ٠,٩٢ \quad ، \quad \hat{ل} = ٠,٩٠$$

حساب فترة ثقة مناسبة:

$$ح \pm د \times \sqrt{\frac{ح ل}{ن}}$$ بدرجة ثقة معينة

$$٠,٠٨ \pm ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{٠,٠٨ \times ٠,٩٢}{١٠٠٠}}$$ بدرجة ثقة ٩٥٪

$$= ٠,٠٨ \pm ٠,٠١٧$$

$$= ٦,٣٪ \quad ، \quad ٩,٧٪$$ بدرجة ثقة ٩٥٪

∵ النسبة فى العينة ١٠٪ تقع خارج فترة الثقة ∴ العينة غير عشوائية أو لا تنتمى لهذا المجتمع (ض١ H_1)

التطبيق السادس:

بلغ متوسط انتاج العامل اليومى فى إحدى الصناعات ٣٠ قطعة فإذا كان الإنحراف المعيارى لعدد القطع المنتجة يومياً ٥ قطع ، إخترنا عينة من العمال حجمها ٤٠ عاملاً لحضور برنامج تدريبى وبعد إنتهاء البرنامج ارتفع متوسط إنتاجية العامل المتدرب إلى ٣٥ قطعة يومياً ، هل البرامج التدريبية أفادت وتوصى بتعميمها أم لا ؟ وذلك بفرض أن مستوى المعنوية α = ١٪

الحل:

م = ٣٠ ، $\overline{س}$ = ٣٥ ، ن = ٤٠ ، عَ = ٥

حساب فترة ثقة مناسبة:

$$م \pm د \times \frac{عَ}{\sqrt{ن}}$$ بدرجة ثقة معينة

$$٣٠ \pm ٢,٥٨ \times \frac{٥}{\sqrt{٤٠}}$$ بدرجة ثقة ٩٩٪

= ٣٠ ± ٢,٠٤ بدرجة ثقة ٩٩٪

٢٧,٩٦ ، ٣٢,٠٤ بدرجة ثقة ٩٩٪

∵ متوسط العينة بعد التدريب خارج فترة الثقة ∴ التدريب أفاد ورفع مستوى إنتاجية العامل و نوصى بتعميمه (ض١ H_1)

التطبيق السابع:

أجِّرى إختبار بين عينتين من الطلبة والطالبات لقياس مستوى تحصيلهم فى اللغات فكانت النتائج كما يلى:

عينة الطلبة	عينة الطالبات
ن١ = ١٠٠ طالب	ن٢ = ٨٠ طالبة
$\overline{س}$١ = ٢٣ درجة	$\overline{س}$٢ = ٢٤ درجة
ع١^٢ = ٢٥ درجة	ع٢ = ٤ درجات

هل المجتمعان متشابهان أم مختلفان وذلك عند مستوى معنوية ∝ = ٥٪

<u>الحل:</u>

$$ع_{\bar{س}_1 - \bar{س}_2} = د \times \sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}$$

$$= ١,٩٦ \times \sqrt{\frac{٢٥}{١٠٠} + \frac{١٦}{٨٠}}$$

$$= ١,٩٦ \times ٠,٦٧ = |١,٣١٥|$$

الفرق المطلق بين المتوسطين = $|\bar{س}_1 - \bar{س}_2|$

$$= |٢٣-٢٤| = |١|$$

بما أن الفرق المطلق بين المتوسطين |١| أصغر من الخطأ المشترك المطلق |١,٣١٥| ∴ نقبل الفرض العدمى (ض. H_0) بأن مستوى الطلبة والطالبات متكافئ أو متعادل فى تحصيل اللغات.

<u>حل آخر بإستخدام الطريقة المختصرة:</u>

$$\bar{د} = \frac{|\bar{س}_1 - \bar{س}_2|}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}} = \frac{٢٣-٢٤}{\sqrt{\frac{٢٥}{١٠٠} + \frac{١٦}{٨٠}}} = |١,٤٩|$$

، د الجدولية |١,٩٦|

∵ د < د ∴ نقبل الفرض العدمى (ض. H_0) بأن مستوى الطلبة والطالبات متكافئ أو متعادل فى تحصيل اللغات.

التطبيق الثامن:

قارن بين نسبة الوحدات المعيبة فى المصنعين (١) ، (٢) من واقع بيانات العينتين التاليتين عند مستوى معنوية α = ١٪

عينة مصنع (١)	عينة مصنع (٢)
$ن_١$ = ١٠٠	$ن_٢$ = ١٢٠
عدد القطع المعيبة = ٥	عدد القطع المعيبة = ٧

الحل:

$$\hat{ح}_١ = \frac{٥}{١٠٠} = ٠,٠٥ \qquad \hat{ح}_٢ = \frac{٧}{١٢٠} = ٠,٠٥٨$$

$$\hat{ل}_١ = ٠,٩٥٠ \qquad \hat{ل}_٢ = ٠,٩٤٢$$

$$ع_{\hat{ح}_١ - \hat{ح}_٢} = د \times \sqrt{\frac{\hat{ح}_١ \hat{ل}_١}{ن_١} + \frac{\hat{ح}_٢ \hat{ل}_٢}{ن_٢}}$$

$$= ٢,٥٨ \times \sqrt{\frac{٠,٠٥ \times ٠,٩٥}{١٠٠} + \frac{٠,٠٥٨ \times ٠,٩٤٢}{١٢٠}}$$

$$= ٢,٥٨ \times ٠,٠٣٠٥ = |٠,٧٨٧|$$

الفرق بين النسبتين $= |\hat{ح}_١ - \hat{ح}_٢| = |٠,٠٥٠ - ٠,٠٥٨| = |٠,٠٠٨|$

∵ الفرق المطلق بين النسبتين (٠,٠٠٨) أصغر من الخطأ المشترك المطلق (٠,٧٨٧) ∴ نقبل الفرض العدمى (ض.H_0) بأن النسبتين متعادلتان أى أن $ح_١ = ح_٢$

حل آخر:

نوجد $\bar{د} = \frac{|\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2|}{\sqrt{\frac{\hat{ح}_1 \hat{ل}_1}{ن_1} + \frac{\hat{ح}_2 \hat{ل}_2}{ن_2}}} = \frac{٠,٠٠٨}{\sqrt{\frac{٠,٩٥ \times ٠,٠٥}{١٠٠} + \frac{٠,٩٤٢ \times ٠,٠٥٨}{١٢٠}}} = |٠,٢٦|$

∵ د المحسوبة (٠,٢٦) أصغر من د الجدولية (٢,٥٨)

∴ نقبل الفرض العدمى (ض. H_0) بأن $ح_١ = ح_٢$

الجداول الاحصائية

جداول الأعداد العشوائية

عمود (١)	عمود (٢)	عمود (٣)	عمود (٤)	عمود (٥)	عمود (٦)	عمود (٧)	عمود (٨)	عمود (٩)	عمود (١٠)	عمود (١١)	عمود (١٢)
٢	٠	٥	١	٨	٩	٣	٢	٧	٠	٣	٦
٣	٢	٥	٧	١	٣	٢	٤	٨	١	٩	٥
٥	٦	١	٥	٧	٨	٥	٣	٦	٢	٠	١
٦	١	٠	٩	٥	٠	٣	٢	٧	٧	٥	١
٥	٨	٣	١	٢	٦	٨	٤	٥	٣	٦	١
٠	٠	٣	٥	١	١	٦	٥	٣	٤	٢	٢
٧	١	١	٢	٥	٦	٣	٨	٤	٢	٠	٨
٥	٢	٣	٧	٦	١	٠	٣	٨	٠	٣	٤
٩	١	٣	٠	٢	٢	٤	٥	٥	٣	٣	٦
٤	٨	٨	٣	٧	٢	٥	٣	٦	٢	٩	٥
٧	١	١	٩	٠	٨	٥	٤	٧	٢	٩	٢
٤	٦	٧	٤	٣	٣	٥	٩	٥	١	٦	٠
٠	٧	٢	٠	١	٩	٨	١	٢	٧	٧	٩
٠	١	١	٢	٣	٤	٤	٠	٥	٦	٦	٨
٩	٩	٣	٣	٧	١	٢	١	٧	٥	٠	٤
٩	٣	٤	٧	٠	٩	٩	٧	١	٨	١	٣
٤	٦	٣	٢	٠	٦	٠	٣	٨	٢	٧	٤
٩	٠	٦	٨	١	٧	٥	٣	٨	٤	٤	٢
٣	٣	٤	٢	٨	٠	٩	٩	٠	٥	٨	٩
١	٠	٢	٤	٣	٥	٤	٦	٨	٢	١	٥

تابع جداول الأعداد العشوائية

عمود (١)	عمود (٢)	عمود (٣)	عمود (٤)	عمود (٥)	عمود (٦)	عمود (٧)	عمود (٨)	عمود (٩)	عمود (١٠)	عمود (١١)	عمود (١٢)
٣	١	٥	٢	٤	٦	٤	٤	٧	٢	١	٩
٥	٣	٤	١	٦	٧	٣	٦	٧	٦	٢	٢
٦	٣	٥	٧	١	٧	٢	٥	١	٢	٢	٧
٥	١	٠	٨	٧	٧	٦	٤	٢	٣	١	٤
١	٦	٥	١	٠	٧	٩	١	٨	٤	٦	٥
٦	١	٣	٧	٦	٦	٥	٣	٤	١	٩	٢
٧	٢	٢	٩	٠	١	١	٤	٣	١	٨	٤
٦	١	١	٧	٣	٥	٦	١	٣	٢	٤	١
٣	٠	٤	٤	٦	٢	٨	١	١	٦	٢	١
١	٤	٢	٣	٦	٣	٣	٤	٧	٥	٥	١
٠	١	٦	١	١	٥	٤	٤	٧	١	٦	٣
٣	٨	٤	٦	٥	٤	٦	٣	٠	٨	٢	٦
٦	٤	١	٣	٨	٦	٢	١	٦	٦	١	١
٠	٢	١	٦	٣	٧	٥	٢	٣	٣	٦	٨
٥	٧	٣	٤	٠	٢	٨	٤	٥	٠	٦	٩
٤	٨	٠	٣	٦	٢	٩	٢	٨	٥	٣	٠
٠	٩	٩	١	٣	٩	٥	٢	٩	٢	٥	١
٨	٢	١	٠	٩	٧	٩	٩	٠	٠	٧	٤
٠	٦	٥	٦	٧	٥	٧	٤	٦	١	٠	٥
٠	١	٣	٦	٣	٠	٧	٠	٥	٢	٦	٠

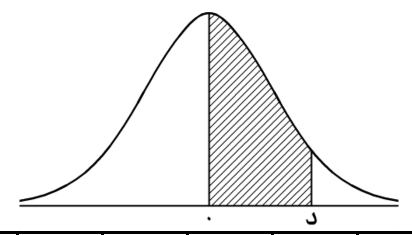
تابع جداول الأعداد العشوائية

عمود (١)	عمود (٢)	عمود (٣)	عمود (٤)	عمود (٥)	عمود (٦)	عمود (٧)	عمود (٨)	عمود (٩)	عمود (١٠)	عمود (١١)	عمود (١٢)
٦	١	٣	٢	٦	٩	٥	٨	٢	١	٣	١
٥	٨	٩	٢	١	٠	٧	٧	٧	٦	٦	١
٣	١	٥	٤	٢	٢	٦	٨	٥	٢	١	٣
٤	٣	٨	٥	٩	٢	٦	٩	٤	٣	٣	٨
٥	٨	٨	٨	٤	٥	٢	٠	٠	٦	١	٠
٥	٩	٩	١	٦	٤	٣	٧	٨	٤	٩	٦
٠	١	٣	٢	٢	٠	٧	١	٥	٥	٦	٠
٤	١	٦	٢	٤	٣	٠	٣	٥	٣	٨	١
٨	٤	٥	٧	٥	٣	٥	٥	٠	٨	٢	٨
٦	١	٠	٦	٥	٩	٢	١	٧	١	٣	٢
١	٤	٦	١	٣	٦	٧	١	٥	٢	٤	٣
٥	٩	٣	٤	٦	٢	٧	٥	٢	٥	٣	٣
٥	١	٦	٨	٧	٧	٦	٤	١	٢	٢	٥
١	٢	٣	٥	٤	٦	٥	٧	١	٣	٢	٤
٥	٤	٣	٦	٦	٥	٢	٢	٣	٥	١	٧
٠	١	٣	٤	١	٢	٨	٢	٥	١	٠	٧
٦	٢	٣	٥	٢	٤	١	٢	٢	٧	٣	٥
١	١	٤	٤	٦	٢	٣	١	٥	٣	٦	٢
٢	٣	٥	١	١	٢	١	١	٧	٠	١	٤
٠	٩	١	٨	٤	٧	١	٢	٦	١	٩	٠

تابع جداول الأعداد العشوائية

عمود (١)	عمود (٢)	عمود (٣)	عمود (٤)	عمود (٥)	عمود (٦)	عمود (٧)	عمود (٨)	عمود (٩)	عمود (١٠)	عمود (١١)	عمود (١٢)
١	٢	٢	٩	٥	١	٣	٠	٦	٩	٥	٢
٨	٠	٥	٨	٧	٩	٠	١	٢	٢	٣	١
٩	٤	٩	٠	٠	٢	٤	٠	٥	٤	٠	٤
٠	٨	٣	٠	٢	٥	٤	٩	٥	٠	٢	٧
٨	٧	٣	٦	٨	٢	٧	٣	٨	١	٨	٤
٤	٠	٣	٥	٠	٦	٨	٤	٧	٨	٩	٩
١	٥	٦	٢	٤	٧	٢	٠	٦	٤	٧	١
٦	٣	٠	٢	٤	١	١	١	٤	٦	٥	٥
٩	٢	٠	٩	٥	٣	١	٢	٨	٧	٩	٤
٥	٤	٣	٤	٦	٠	١	٩	٤	٧	٠	٠
١	٢	٥	٠	٦	٤	٨	٩	١	٤	٢	٥
١	٦	٨	١	٦	١	٢	٠	٣	٩	٩	٤
٣	١	٦	٠	٢	٥	٤	١	٣	٧	٨	٣
٠	١	٠	٧	٢	٥	٤	٨	٥	٣	٠	٨
٥	٢	٥	٨	٢	٩	٦	٧	٣	٦	٢	٢
٤	٦	٣	٨	٤	٤	٠	٣	١	٠	٨	٩
٤	٠	٧	٢	١	١	١	٤	٣	٥	١	٧
٧	٣	٠	٤	٠	٧	٦	٧	٩	٤	٥	٧
٧	٦	٠	٩	٨	٥	٩	٥	٥	١	١	٢
٦	١	٦	٧	٠	٦	١	٨	٠	٥	٧	٥

جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى
Areas under Standard Normal Distribution



د	٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠	٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٥٩
٠,١	٠,٠٣٩٦	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٣
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	٠,١٩٨٥	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٩٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٧	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٧	٠,٢٥٨٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٣	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٠,٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٥	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٠	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٩٢٥	٠,٣٩٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣١٩
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤١
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧
٢	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٤	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٣	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣
٣,٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥
٣,٣	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٧
٣,٤	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨
٣,٥	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨
٣,٦	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩
٣,٧	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩	٠,٤٩٩٩

الفهرس

الصفحة